Dinámica

MATEMÁTICA

LIBRO CARPETA

3

puerto de palos

Gerente editorial

Daniel Arroyo

Jefe del área de Matemática

Gabriel H. Lagoa

Autores

Roxana Abálsamo
Sandra Barrutia
Mariela Boccioni
Graciela Cabral
María Milagros Memoli
Mariel Strahman
Alicia Tabaj
Yésica Vigione

Corrector de estilo

Gabriel Valeiras

Coordinadora del Departamento de Arte y Diseño

María Natalia Bellini

Diagramación

Inés Rossano

Fotografías

Archivo Multimedia Macmillan Education
123rf

Matemática 3 : dinámica / Roxana Abálsamo ... [et al.]. - 1a ed. - Boulogne :
Puerto de Palos, 2020.
208 p. ; 28 x 20 cm.
ISBN 978-987-764-305-3
1. Educación Secundaria. 2. Matemática. I. Abálsamo, Roxana.
CDD 510.712

© Editorial Puerto de Palos S.A., 2021.

Editorial Puerto de Palos S.A. forma parte del Grupo Macmillan.
Av. Blanco Encalada 104, San Isidro, provincia de Buenos Aires, Argentina.

Internet: www.puertodepalos.com.ar

Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723.

Impreso en Argentina.

Printed in Argentina.

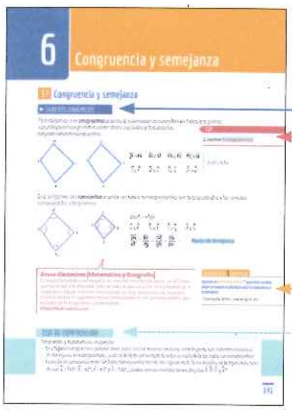
ISBN 978-987-764-305-3

La presente obra se ha elaborado teniendo en cuenta los aportes surgidos de los encuentros organizados por el Instituto Nacional contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi) con los editores de texto.
No se permite la reproducción parcial o total, el almacenamiento, el alquiler, la transmisión o la transformación de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, sea electrónico o mecánico, mediante fotocopias, digitalización y otros métodos, sin el permiso previo del editor.
Su infracción está penada por las leyes 11.723 y 25.446.

Primera edición.
Esta obra se terminó de imprimir en diciembre de 2020, en Arcángel Maggio – División libros, Lafayette 1695, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Dinámica Matemática 3

Es una nueva propuesta que facilita el aprendizaje de la matemática a través de 541 actividades que favorecen la comprensión de los distintos temas.

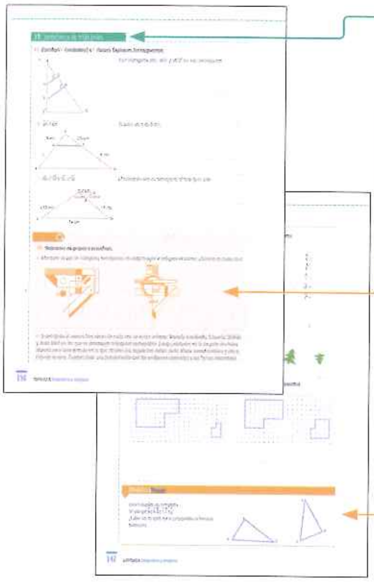


SABERES DINÁMICOS se presentan definiciones, clasificaciones, procedimientos básicos y ejemplos de cada contenido que facilitan la comprensión.

Áreas dinámicas [Matemática y...] se integran contenidos del área con saberes de otras áreas.

Dinámica Conecta se presentan enlaces web con demostraciones, ejemplos, procedimientos, etcétera.

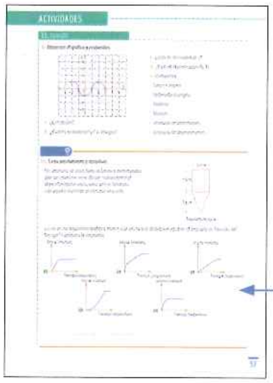
TEST DE COMPRENSIÓN se presentan preguntas básicas que permiten evaluar la comprensión de la teoría y trabajar sobre errores frecuentes.



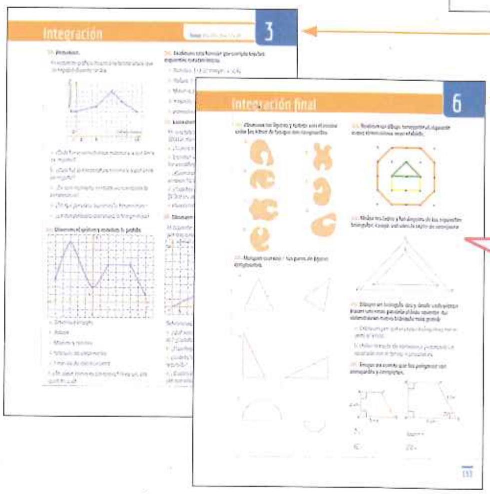
ACTIVIDADES para cada tema se proponen distintas actividades que están relacionadas de manera secuencial.

actividades para realizar en grupos.

DinámicaMente propone situaciones problemáticas con un mayor nivel de complejidad.



actividades del estilo de las evaluaciones educativas nacionales e internacionales.



Integración incluye más actividades para resolver en la carpeta.

Trabajo con capacidades

En todos los capítulos se ofrecen variadas actividades orientadas a desarrollar valores y habilidades del ciudadano del siglo XXI.

ÍNDICE

Capítulo 1: NÚMEROS REALES

1. Números racionales. ... 5
2. Operaciones con números racionales. ... 7
3. Potenciación y radicación. ... 11
4. Operaciones combinadas. ... 13
   Integración 1-2-3-4 ... 17
5. Números irracionales. ... 19
6. Aproximación y notación científica. ... 23
7. Intervalos reales. ... 25
   Integración final ... 27

Capítulo 2: LENGUAJE ALGEBRAICO

8. Expresiones algebraicas. ... 29
9. Propiedad distributiva. Factorización. ... 33
10. Cuadrado y cubo de un binomio. ... 35
    Integración 8-9-10 ... 37
11. Ecuaciones. ... 39
12. Problemas con ecuaciones. ... 45
13. Inecuaciones. ... 47
    Integración final ... 49

Capítulo 3: FUNCIONES

14. Interpretación de gráficos. ... 51
15. Función. ... 55
16. Función lineal. ... 59
17. Ecuación de la recta. ... 63
18. Rectas paralelas y perpendiculares. ... 67
    Integración 14-15-16-17-18 ... 69
19. Sistemas de ecuaciones. ... 71
20. Resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones. ... 75
21. Función cuadrática. ... 79
    Integración final ... 83

Capítulo 4: FIGURAS PLANAS

22. Circunferencia y círculo. ... 85
23. Ángulos inscriptos y semiinscriptos. ... 87
24. Puntos notables de un triángulo. ... 91
25. Teorema de Pitágoras. ... 93
    Integración 22-23-24-25 ... 95
26. Clasificación y propiedades de los cuadriláteros. ... 97
27. Construcciones geométricas. ... 101
28. Propiedades de los polígonos. ... 105
29. Perímetro y área. ... 107
    Integración final ... 111

Capítulo 5: RAZONES Y PROPORCIONES

30. Razones y proporciones aritméticas. ... 113
31. Propiedades de las proporciones. ... 117
32. Proporcionalidad directa e inversa. ... 119
    Integración 30-31-32 ... 123
33. Teorema de Thales. ... 125
34. Aplicaciones del teorema de Thales. ... 129
35. Razones trigonométricas. ... 131
36. Resolución de triángulos rectángulos. ... 135
    Integración final ... 139

Capítulo 6: CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

37. Congruencia y semejanza. ... 141
38. Congruencia de triángulos y de polígonos. ... 143
39. Semejanza de triángulos. ... 147
40. Congruencia y semejanza de triángulos rectángulos. ... 151
    Integración final ... 153

Capítulo 7: MOVIMIENTOS EN EL PLANO

41. Traslación. ... 155
42. Rotación. ... 157
43. Simetría central. ... 159
44. Simetría axial. ... 161
    Integración 41-42-43-44 ... 163
45. Eje de simetría de figuras planas. ... 165
46. Composición de movimientos. ... 167
47. Homotecia. ... 171
    Integración final ... 173

Capítulo 8: ESTADÍSTICA

48. Población, muestra y variables. ... 175
49. Frecuencias y gráficos. ... 177
50. Medidas de posición. ... 181
    Integración 48-49-50 ... 183
51. Intervalos y gráficos. ... 185
52. Media y moda en intervalos. ... 189
    Integración final ... 191

Capítulo 9: COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

53. Factorial. ... 193
54. Permutaciones. ... 195
55. Variaciones. ... 197
56. Combinaciones. ... 199
    Integración 53-54-55-56 ... 201
57. Probabilidad. ... 203
58. Probabilidades condicionales. ... 205
    Integración final ... 207

1 Números reales

1. Números racionales

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **número racional** a todo número que se puede escribir como un cociente $\frac{a}{b}$ llamado **fracción,** donde a y b son números enteros (con b distinto de 0).

$\frac{a}{b}$ — "a" es el numerador; "b" es el denominador

Si se efectúa la división entre el numerador y el denominador, se obtiene la **expresión decimal de la fracción.** Esta expresión decimal está formada por una parte entera y una parte decimal que puede ser exacta o periódica.

Expresión decimal exacta	Tiene una cantidad finita de cifras decimales		$\frac{9}{4} = 2{,}25$
Expresión decimal periódica	Las cifras decimales se repiten infinitamente	**Puras** (todas sus cifras decimales son periódicas)	$\frac{5}{9} = 0{,}555... = 0{,}\widehat{5}$
		Mixtas (tienen una parte decimal no periódica seguida de otra periódica)	$\frac{38}{90} = 0{,}4222...=0{,}4\widehat{2}$

• Una fracción irreducible tiene una expresión decimal exacta cuando los factores primos del denominador son potencias de 2, de 5 o de ambas.

$\frac{11}{50}$ es una fracción irreducible y su denominador se puede expresar $\frac{11}{2 . 5^2} = 0{,}22.$

• Las expresiones decimales exactas se pueden escribir como **fracción decimal**. La **fracción decimal** es una fracción cuyo denominador es igual a la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la expresión decimal que le corresponde. $1{,}75 = \frac{175}{100}$

• Las expresiones decimales periódicas no se pueden escribir como una fracción decimal.

Para pasar una **expresión decimal periódica pura** a fracción, se escriben en el numerador todas las cifras, periódicas y no periódicas, y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras tenga el período.

$$1{,}\widehat{2} = \frac{12 - 1}{9} = \frac{11}{9}$$

Para pasar una **expresión decimal periódica mixta** a fracción, se escriben en el numerador todas las cifras, periódicas y no periódicas, y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras periódicas y tantos ceros como cifras no periódicas tenga la expresión.

$$0{,}2\widehat{5} = \frac{25 - 2}{90} = \frac{23}{90}$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que $0{,}\widehat{7}$ es igual a $\frac{7}{10}$?
   b. ¿Cuál es la expresión decimal de $\frac{17}{99}$?
   c. ¿Cómo se puede demostrar, sin dividir, que la expresión decimal de $\frac{7}{20}$ es exacta?

ACTIVIDADES

1. Números racionales

1. Completen la tabla.

Fracción	Fracción irreducible	Expresión decimal	Fracción decimal
$\frac{10}{20}$			
$\frac{12}{16}$			
$\frac{50}{200}$			
$\frac{6}{30}$			

2. Transformen en fracción las siguientes expresiones decimales periódicas.

a. $0,\overset{\frown}{7} = \frac{\square}{\square}$　c. $0,\overset{\frown}{65} = \frac{\square}{\square}$　e. $23,\overset{\frown}{45} = \frac{\square}{\square}$　g. $9,\overset{\frown}{8} = \frac{\square}{\square}$

b. $1,1\overset{\frown}{2} = \frac{\square}{\square}$　d. $0,23\overset{\frown}{7} = \frac{\square}{\square}$　f. $8,0\overset{\frown}{3} = \frac{\square}{\square}$　h. $0,\overset{\frown}{9} = \frac{\square}{\square}$

3. Escriban dos ejemplos que cumplan lo pedido en cada caso.

a. Fracción irreducible cuya expresión decimal sea exacta: ____________________

b. Fracción cuya expresión decimal sea periódica: ____________________

c. Fracción decimal que represente más de un entero: ____________________

d. Fracción decimal cuya expresión decimal tenga parte entera igual a ocho: ____________________

4. Escriban la fracción irreducible que corresponde a cada expresión decimal.

a. $0,\overset{\frown}{3} = \frac{\square}{\square}$　c. $0,\overset{\frown}{66} = \frac{\square}{\square}$　e. $2,4 = \frac{\square}{\square}$　g. $9,5 = \frac{\square}{\square}$

b. $1,0\overset{\frown}{3} = \frac{\square}{\square}$　d. $0,25 = \frac{\square}{\square}$　f. $11,0\overset{\frown}{3} = \frac{\square}{\square}$　h. $0,\overset{\frown}{63} = \frac{\square}{\square}$

5. Escriban una fracción que esté comprendida entre los números dados.

a. $1,2 \quad \frac{\square}{\square} \quad 1,3$　d. $1,17 \quad \frac{\square}{\square} \quad 1,\overset{\frown}{2}$

b. $\frac{1}{2} \quad \frac{\square}{\square} \quad 0,6$　e. $0,\overset{\frown}{8} \quad \frac{\square}{\square} \quad 1$

c. $1,\overset{\frown}{4} \quad \frac{\square}{\square} \quad 1,45$　f. $2\frac{3}{4} \quad \frac{\square}{\square} \quad 3,25$

6. Encuentren la expresión decimal de cada fracción. Luego, ordenen las expresiones de mayor a menor.

$$\frac{23}{100}; \frac{1\,789}{1\,000}; \frac{5}{9}; \frac{1}{1\,000}; \frac{3}{2}; \frac{181}{99}; \frac{201}{100}$$

____

2. Operaciones con números racionales

▶ SABERES DINÁMICOS

Operación	Con fracciones	Con números decimales
Suma y resta	Para **sumar o restar fracciones**, se buscan fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego se resuelve. Para encontrar el denominador común, se busca el múltiplo común menor entre los denominadores $\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{15}{20}+\frac{4}{20}-\frac{10}{20}=\frac{9}{20}$ *mcm (4; 5; 2)*	Para **sumar o restar números decimales exactos**, se deben escribir en columna haciendo coincidir las partes enteras, la coma y las cifras decimales, luego se resuelve. En aquellos casos que falten cifras, se deben completar con cero. *1,348 + 5,119 = 6,467* *5,40 − 3,17 = 2,23*
Multiplicación	Para **multiplicar fracciones**, se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí. Siempre que sea posible hay que simplificar (ya sea las fracciones o el resultado) $\frac{6}{5}\cdot\frac{20}{18}=\frac{6\cdot20}{5\cdot18}=\frac{120}{90}=\frac{4}{3}$	Para **multiplicar dos números decimales exactos**, se multiplican como si fuesen números enteros y luego para colocar la coma en el resultado se cuentan tantas cifras decimales como tenga la suma de los lugares decimales de los factores. *1,23 . 7,8 = 9,594* 2 decimales + 1 decimal = 3 decimales
División	Para **dividir** dos fracciones, se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda fracción. Toda fracción distinta de cero admite un **inverso multiplicativo.** *Por ejemplo, el inverso multiplicativo de* $\frac{3}{5}$ *es* $\frac{5}{3}$*.* *Se transforma la división en multiplicación* $\frac{2}{14}:\frac{8}{21}=\frac{2}{14}\cdot\frac{21}{8}=\frac{42}{112}=\frac{3}{8}$ *Inverso multiplicativo*	Para **dividir** dos números decimales exactos, se deben multiplicar el dividendo y el divisor por 10, 100, 1 000 hasta transformar el divisor en un número natural y luego se resuelve la división. *. 10* *61,78 : 0,2 = 617,8 : 2 = 308,9* *. 10*

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que el inverso multiplicativo de $0,\overset{\frown}{7}$ es igual a $\frac{9}{7}$?
   b. Para resolver 12,3 : 2,34, ¿es correcto multiplicar por 10 el dividendo y el divisor?
   c. Para dividir $\frac{8}{9}:\frac{2}{3}$ ¿se podrá hacer $\frac{8:2}{9:3}=\frac{4}{3}$? ¿Qué harían para resolver $\frac{3}{7}:\frac{1}{2}$ de la misma manera?

ACTIVIDADES

2. Operaciones con números racionales

7. Transformen los números mixtos en fracciones y resuelvan las operaciones.

a. $3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} =$

d. $1\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{5} =$

b. $2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6} =$

e. $\frac{15}{4} : 1\frac{7}{8} =$

c. $3\frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} =$

f. $1\frac{1}{6} : \frac{13}{3} =$

8. Resuelvan las siguientes operaciones con números decimales.

a. 123,73 + 7,89 =

d. 2,3 . (12,6 + 2,4) =

b. 45,8 − 15,98 =

e. (56,13 − 8,13) : 0,8 =

c. 1,26 + 7,8 − 1,973 =

f. 1,2 . 0,25 + 2,4 : 0,2 =

9. Escriban un par de paréntesis para que el resultado sea el dado y verifiquen.

a. $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{4}{10} = \frac{8}{15}$

b. $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} + 1 : 2 = \frac{7}{8}$

c. $2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

d. $\frac{1}{2} + 5 : \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

10. Completen con el número que falta para que se verifique la igualdad.

a. $\frac{1}{5} + \boxed{} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

c. $\frac{27}{25} : \boxed{} = \frac{6}{5}$

b. $\boxed{} - \frac{1}{14} + 1 = \frac{53}{14}$

d. $\boxed{} \cdot \frac{11}{16} = \frac{1}{12}$

2. Operaciones con números racionales

11. Completen con la expresión simbólica, resuelvan y escriban el resultado como fracción.

Enunciado coloquial	Expresión simbólica	Resultado
El doble de la suma entre $0,\widehat{3}$ y el inverso de 3.		
La diferencia entre el opuesto de $-\frac{4}{5}$ y 0,2.		
El producto entre la mitad de un medio y un cuarto.		
El cociente entre el opuesto de -1 y dos tercios.		
El triple de $0,\widehat{2}$ aumentado en dos unidades.		
La diferencia entre un quinto y dos décimos.		
El doble del producto entre tres y cinco doceavos.		

12. Completen con el enunciado coloquial, resuelvan y escriban el resultado como número decimal.

Expresión simbólica	Enunciado coloquial	Resultado
$\frac{5}{2} - 0,2 : 2$		
$\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4}$		
$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$		
$\frac{5}{8} : \frac{1}{4}$		
$(1,2 - 1) : 3$		
$\frac{7}{5} - 0,2$		
$-\left(\frac{5}{9} - 1\right)$		

13. **Lean atentamente y resuelvan con un compañero.**

Una plataforma ofrece películas en alquiler. Para los suscriptores, que pagan una cuota anual de \$1 200, el precio de alquiler de cada película es de \$25,5 y para los que no lo son es de \$125,5. El año pasado, Juan gastó \$1 480,5, incluida la cuota de socio.

a. ¿Cuánto habría gastado si no hubiese estado suscripto?

b. ¿Cuál es el número mínimo de películas que debe alquilar un suscriptor para cubrir el costo de su cuota? Escriban los cálculos realizados.

2. Operaciones con números racionales

14. Resuelvan.

a. $\left(1,\overset{\frown}{3} - \frac{1}{9}\right) : \frac{3}{2} =$

b. $0,\overset{\frown}{9} : 0,\overset{\frown}{5} - \frac{3}{5} + 0,1 =$

c. $\frac{0,\overset{\frown}{8}}{0,9} + \frac{1}{81} - \frac{1}{2} =$

d. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) : \frac{8}{3} - \frac{3}{16} =$

e. $\left(1,2 - \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\right) + 0,25 =$

f. $2 . \left(\frac{5}{3} - 0,\overset{\frown}{6}\right) + \frac{1}{2} . (0,5 + 0,\overset{\frown}{3}) =$

g. $\left(1,1 - \frac{1}{10}\right) : \frac{15}{8} =$

h. $\left(\frac{1,\overset{\frown}{4}}{2,\overset{\frown}{8}} - \frac{1}{2}\right) . \frac{11}{7} =$

i. $\frac{\left(\frac{4}{3} + 0,6\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)} + 1 =$

j. $\left(0,2 - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{11}{5} - 2\right) + 0,84 =$

k. $\left(1 + \frac{3}{5}\right) : \frac{16}{25} + 1 - \frac{1}{4} =$

l. $3 : (1 - 0,\overset{\frown}{6}) + \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{3} + 0,\overset{\frown}{3}\right) =$

3. Potenciación y radicación

▶ SABERES DINÁMICOS

Para calcular la **potencia** de una fracción, se debe calcular la potencia del numerador y la potencia del denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Para calcular la **raíz** de una fracción se debe calcular la raíz del numerador y la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10}$$

Propiedades de la potenciación y de la radicación

Propiedad	Expresión simbólica	Ejemplo
Potencia de exponente cero	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{5}{11}\right)^0 = 1$
Potencia de exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
Producto de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
Cociente de potencias de igual base	$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^9 : \left(\frac{4}{5}\right)^7 = \left(\frac{4}{5}\right)^{9-7} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$
Potencia de otra potencia	$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m.n}$	$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3.5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$
Potencia de exponente fraccionario	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3}$
Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la multiplicación y a la división	$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m$ $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m$	$\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$ $\left(\frac{7}{9} : \frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{7}{9}\right)^4 : \left(\frac{3}{5}\right)^4$
Propiedad distributiva de la radicación respecto a la multiplicación y a la división	$\sqrt[m]{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ $\sqrt[m]{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} : \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot \frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ $\sqrt[4]{\frac{2}{5} : \frac{8}{20}} = \sqrt[4]{\frac{2}{5}} : \sqrt[4]{\frac{8}{20}}$
Raíz de otra raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m.n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}} = \sqrt[2.3]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que existe una única fracción que elevada a la 0 da 1?
   b. ¿Es cierto que $\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^3} = \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3}}$?
   c. Expliquen por qué para calcular la potencia de una fracción se tiene que escribir la fracción entre paréntesis?

ACTIVIDADES

3. Potenciación y radicación

15. Completen los espacios vacíos en los siguientes cálculos.

a. $\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \frac{121}{36}$

b. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\square} = \frac{8}{125}$

c. $\sqrt{\frac{\square}{\square}} = \frac{8}{7}$

d. $\sqrt[\square]{\frac{343}{81}} = \frac{7}{3}$

16. Unan con flechas las operaciones que tienen el mismo resultado.

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \,.\, \sqrt{3^{-1}}$

b. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^5$

c. $\left(\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3}\right)^2$

d. $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

• $\left(\sqrt{\frac{121}{49}}\right)^0$

• $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^2 : \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^6}$

• $\sqrt{\frac{4}{5^2}}$

• $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \,.\, 2^6$

17. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan de dos maneras distintas.

a. El cubo del producto entre un medio y cuatro quintos.

b. La raíz cuadrada de la raíz cúbica de un sesentaicuatroavo.

18. Resuelvan aplicando propiedades.

a. $(0,\widehat{2})^2 : \left(\frac{9}{2}\right)^{-1} =$

b. $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^3 : \sqrt{\left(\frac{1}{25}\right)^4} =$

c. $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} : (0,\widehat{3})^2 =$

d. $\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}} \,.\, 2^{-1}\right)^2 =$

4. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

Para resolver un **cálculo combinado**, se pueden seguir las siguientes recomendaciones:

1. Se separa en términos.
2. Se transforman las expresiones decimales en fracciones.
3. En el caso de haber paréntesis, se resuelven las operaciones que están dentro.
4. Se resuelven las potencias y las raíces, aplicando propiedades cuando sea posible.
5. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones; luego se resuelven las sumas y las restas.
6. Se simplifica, si es posible, el resultado.

$2,\widehat{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0,4 : \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{9}{2^4}} =$	Se separa en términos.
$\frac{21}{9} + \frac{1}{4} - \frac{4}{10} : \frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$	Se transforman los números en fracciones y se resuelven potencias y raíces.
$\frac{21}{9} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} =$	Se resuelven multiplicaciones y divisiones.
$\frac{28}{12} =$	Se resuelven sumas y restas.
$\frac{7}{3}$	Se simplifica el resultado.

$\frac{1}{5} + \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{6}\right) - \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} =$	Se separa en términos.
$\frac{1}{5} + \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} + \frac{4}{3}\right) - \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} =$	Se resuelve el paréntesis aplicando propiedades.
$\frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{4} =$	Se resuelven multiplicaciones y divisiones.
$\frac{39}{20}$	Se resuelven sumas y restas.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cuántos términos tiene el siguiente cálculo combinado? $\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$

b. ¿Dónde se deben colocar los paréntesis para que el resultado de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}^3$ sea $\frac{1}{4}$?

c. ¿Qué se debe tener en cuenta para resolver las operaciones que están dentro de los paréntesis?

ACTIVIDADES

4. Operaciones combinadas

19. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La suma entre el cuadrado de un cuarto y el triple de un medio.

b. La diferencia entre siete tercios y la raíz cúbica de un octavo.

c. La raíz cuadrada del cubo de la diferencia entre uno y cinco novenos.

d. El cuadrado del cubo de un medio, aumentado en una unidad.

20. Coloquen los paréntesis en el lugar necesario para obtener los resultados correctos.

a. $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$

b. $0{,}5 : \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{4}{5}$

c. $\frac{2}{3}\ ^{2} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

d. $\sqrt[3]{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{75} + 2{,}75^{-1}} = \frac{1}{5}$

21. Resuelvan aplicando propiedades.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{3} : 2^{-12} =$

b. $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{81}} + \frac{1}{3}} =$

c. $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)^{2} : \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{4}} =$

d. $0{,}\widehat{1} \,.\, 0{,}01 \,.\, 0{,}\widehat{4} =$

4. Operaciones combinadas

22. Escriban en lenguaje coloquial y resuelvan.

a. $\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{1}{4}}$

b. $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)^2$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}-2\cdot\frac{1}{4}$

e. $\sqrt{3\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)}$

f. $\left(\frac{5}{4}:\frac{10}{3}\right)^2$

23. Calculen las operaciones indicadas sabiendo que $A = 1\frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$ y $C = 0,\widehat{4}$.

a. $\sqrt{C} + A - B =$

b. $(B + C)^{-1} =$

c. $(B^2 . A + C) : 5 =$

d. $(B^2)^3 : C^2 + A =$

e. $\frac{\sqrt{C}}{A . B} =$

f. $\frac{A}{C} + (B^{-1})^2 =$

24. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. $\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{c}{d}}$ ☐

b. $\left(\frac{p}{q}-\frac{c}{d}\right)^x=\left(\frac{p}{q}\right)^x-\left(\frac{c}{d}\right)^x$ ☐

c. $m^{-1}=\frac{1}{m}$ ☐

d. $\sqrt[5]{\left(\frac{y}{z}\right)^n}=\left(\frac{y}{z}\right)^{5n}$ ☐

25. Observen la siguiente operación combinada e indiquen si está resuelta correctamente. Marquen todos los errores que encuentren.

$$\left(\frac{1}{3}-2^{-1}\right)^3+\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3-(-2)^3+\sqrt{\frac{25}{9}}-\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{9}-(-8)+\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{167}{18}$$

4. Operaciones combinadas

26. Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.

a. $\sqrt{\left(1-\frac{8}{9}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{7} : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2} =$

e. $\frac{2}{3} + 0,\overset{\frown}{7} : \sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{0,\overset{\frown}{4}} =$

b. $\left(0,\overset{\frown}{9} - \frac{1}{2}\right)^{2} + \frac{\sqrt{4-\sqrt[3]{27}}}{2} =$

f. $\sqrt{0,04} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{5} : \left(\frac{1}{2}\right)^{8} - \frac{2^{3}}{20} =$

c. $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2^{2}}{5} - \left(\frac{13}{11}\right)^{0} =$

g. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} + 3^{-1} - \left(3 - \frac{7}{9}\right)^{0} =$

d. $\frac{\sqrt[3]{\frac{133}{125} - 1} + 1}{(5^{-1})^{2}} =$

h. $\sqrt{0,25} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \frac{2^{-2}}{\frac{3}{4}} =$

27. Completen la siguiente tabla.

Fracción	Fracción irreducible	Expresión decimal	Fracción decimal
$\frac{14}{20}$			
$\frac{12}{60}$			
$\frac{16}{40}$			
$\frac{65}{250}$			
$\frac{4}{80}$			

28. Transformen los siguientes números periódicos en fracciones y luego simplifiquen cuando sea posible.

a. $0,\widehat{12} =$

b. $4,\widehat{5} =$

c. $1,0\widehat{6} =$

d. $34,\widehat{7} =$

e. $0,1\widehat{39} =$

f. $0,\widehat{9} =$

29. Escriban un ejemplo de lo pedido en cada caso.

a. Una fracción irreducible cuya expresión decimal sea periódica.

b. Un número decimal exacto cuya expresión fraccionaria decimal sea irreducible.

c. Una fracción decimal que represente menos de un entero.

d. Un número periódico mixto cuya expresión fraccionaria tenga el numerador mayor que el denominador.

e. Una fracción irreducible que represente más de un entero.

f. Un número decimal periódico cuya expresión fraccionaria tenga un denominador de 3 cifras.

30. Completen con una fracción que esté comprendida entre los resultados de las operaciones dadas.

a. $1,2 + \frac{1}{2} < \frac{}{} < 1 + \frac{3^2}{10}$

b. $\sqrt[4]{16^{-1}} < \frac{}{} < 3 : \sqrt{4}$

c. $\sqrt{\sqrt{\frac{81}{256}}} < \frac{}{} < \left(\frac{1}{4} + 1\right)^2$

d. $(2^{-1})^2 < \frac{}{} < \frac{1}{3} + 3^{-1}$

e. $1,2 + \frac{2}{5} < \frac{}{} < 1 + \frac{3}{2}$

f. $\sqrt{0,04} < \frac{}{} < 3^2 . 0,1$

31. Encuentren la expresión decimal de cada fracción. Luego, ordenen las expresiones de menor a mayor.

$\frac{4}{5}; \frac{1}{500}; \frac{1}{45}; \frac{6}{5}; \frac{19}{9}; \frac{61}{90}$

32. Resuelvan las operaciones.

a. $2,34 . 0,5 + 1,2^2 =$

b. $0,\widehat{6} - 0,4 : 2 =$

c. $9,5 - (2,25 - 1,6) . 2 =$

d. $\sqrt{1 - 0,99} =$

e. $0,1 . (3 - 2,7) + 1 =$

f. $(1,1 - 0,56)^0 =$

33. Resuelvan, en fracciones, las operaciones sabiendo que $M = \frac{1}{2}$; $N = 0,6$ y $P = 1,2$.

a. $M . N + P =$

b. $N^2 + (P - M)^2 =$

c. $(M + N) : P =$

d. $2M + 9N + P =$

e. $M^2 : N^{-1} =$

f. $\frac{M}{N} + P^{-1} =$

g. $(M + P)^2 - N =$

34. **Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.**

a. El triple de la diferencia entre el cuadrado de tres medios y la raíz cúbica de un octavo.

b. El cuadrado de la suma entre un medio y uno.

c. La raíz cuadrada del doble de un octavo, aumentada en dos unidades.

d. El producto entre dos quintos y el cubo de un medio.

e. La tercera parte del producto entre un medio y dos tercios.

35. **Escriban en lenguaje coloquial y resuelvan.**

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right):4=$

b. $\left(\frac{5}{3}\right)^3-\frac{11}{9}=$

c. $\sqrt{1{,}6-\frac{27}{20}}=$

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{\frac{1}{16}}=$

e. $\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{21}\right)^3=$

36. **Resuelvan aplicando propiedades.**

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2:3^{-11}=$

b. $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}=$

c. $\sqrt{0{,}\widehat{1}\,.\,0{,}04\,.\,0{,}\widehat{9}}=$

d. $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=$

e. $\frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=$

f. $\left(\frac{1}{2}\,.\,0{,}5\right)^2:2^{-1}=$

37. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Escriban un ejemplo para explicar cada respuesta.**

a. La potenciación es distributiva respecto a la suma de dos fracciones. ☐

b. La radicación es distributiva respecto al cociente de dos números decimales. ☐

c. Cuando se eleva una fracción a −1, se obtiene el inverso multiplicativo. ☐

d. La potenciación es distributiva respecto al producto de dos fracciones. ☐

e. La radicación es distributiva respecto a la resta de dos fracciones. ☐

f. Todos los números fraccionarios pueden ser expresados como un número decimal exacto. ☐

38. **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

a. $\sqrt{\left(\frac{27}{4}-\frac{1}{2}\right)^{-1}}-\left(\frac{1}{5}\right)^9:\left[\left(\frac{1}{5}\right)^4\right]^2=$

b. $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3^2}{7}-\left(\frac{3}{211}\right)^0=$

c. $\sqrt{0{,}36}+\sqrt[3]{\frac{1}{125}}-\frac{5^{-2}}{\frac{7}{5}}=$

d. $\frac{1}{9}+0{,}\widehat{5}:\sqrt{\frac{1}{81}}-\sqrt{0{,}\widehat{4}}=$

e. $\sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{256}}}+4^{-1}+2\,.\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=$

f. $1{,}\widehat{9}-\sqrt[5]{32^{-1}}-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}=$

g. $\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{8}+1\right)^0+\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}}-\frac{1}{3}=$

5. Números irracionales

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **números irracionales** son aquellos cuyas expresiones decimales son infinitas y no periódicas.
Algunos números irracionales son: el número π; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$.

Otros números irracionales pueden "inventarse" siguiendo alguna regla de formación para las cifras decimales.

Por ejemplo: 2,13579111315... 1,36912151821...

Las cifras decimales son números impares. — Las cifras decimales son múltiplos de tres.

- Los números irracionales no pueden escribirse como fracción, por lo tanto, no pertenecen al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).
- El conjunto de todos los números irracionales se denomina ($\mathbb{I}$).
- Entre dos números racionales siempre hay algún número irracional.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/rir * y miren el video donde se demuestra que entre dos números racionales siempre hay al menos un número irracional.

* Enlace acortado de https://youtu.be/r2VhbOxjUhQ

Números reales

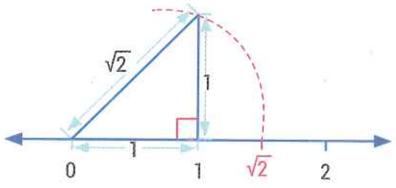
La unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) con el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$) forma el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

El conjunto de los números reales es un conjunto:
- **Denso:** entre dos números reales siempre existe otro número real.
- **Continuo:** a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Representación de los números irracionales en la recta numérica

Para representar en la recta numérica un número irracional, se aplica el teorema de Pitágoras.
Por ejemplo, para representar $\sqrt{2}$, se dibuja sobre la recta numérica (partiendo del 0) un triángulo rectángulo isósceles de lado igual a 1. Luego, con el compás se toma la medida de la hipotenusa del triángulo y se traza un arco hasta que corte la recta numérica. El punto determinado corresponde a $\sqrt{2}$.



$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. El número $\sqrt{0{,}01}$ ¿es irracional?
   b. ¿Cuántos números reales hay entre el 1 y el 2?
   c. ¿Es cierto que todo número irracional es un número real? ¿Y que todo número real es un irracional?

ACTIVIDADES

5. Números irracionales

39. Escriban $\mathbb{Q}$ (racional) o $\mathbb{I}$ (irracional), según corresponda.

a. $0{,}25$ ☐

b. $2^{\frac{1}{2}}$ ☐

c. $\sqrt{5}$ ☐

d. $1{,}2222222222...$ ☐

e. $-\frac{3}{5}$ ☐

f. $2{,}\widehat{6}$ ☐

g. $-\sqrt{4}$ ☐

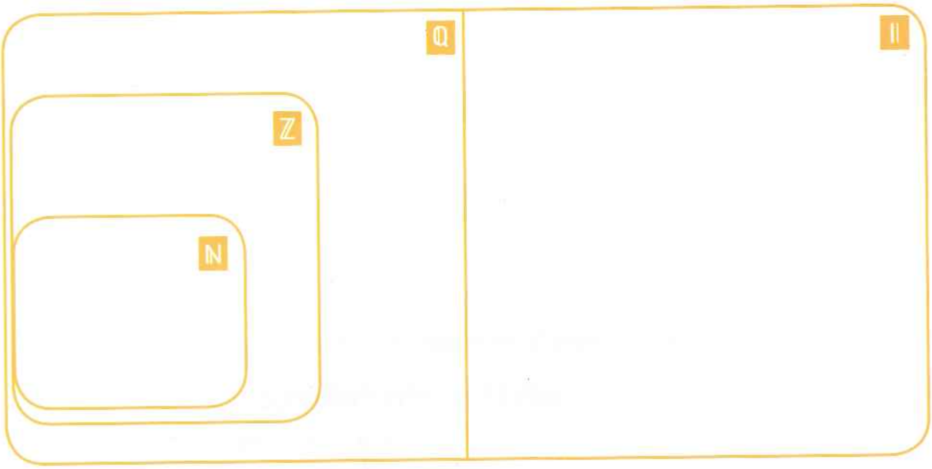
h. $\sqrt[3]{8}$ ☐

i. $0{,}112233445566...$ ☐

j. $\sqrt{11}$ ☐

40. Ubiquen en el diagrama los siguientes números.

$1{,}2$ $\quad 0{,}\widehat{9}$ $\quad \pi$ $\quad 1{,}12345...$ $\quad \frac{1}{3}$ $\quad \sqrt[3]{32}$ $\quad -6$ $\quad \sqrt{13}$



41. Inventen cuatro números irracionales y expliquen la regla de formación que pensaron.

42. Descubran la regla de formación de los siguientes números irracionales y completen con algunas de las cifras que siguen en cada caso.

a. $2{,}5101520...$

b. $1{,}246810...$

c. $0{,}1491625...$

d. $72{,}010203...$

5. Números irracionales

43. Representen en la recta numérica los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{5}$

b. $\sqrt{13}$

c. $\sqrt{34}$

d. $\sqrt{6}$

5. Números irracionales

44. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. $\sqrt{1{,}69}$ es irracional. ☐

b. $1{,}\overset{\frown}{7}$ es un número racional. ☐

c. 0,2 tiene infinitas cifras no periódicas. ☐

d. $\sqrt{26}$ puede escribirse como fracción. ☐

45. Escriban un número irracional que esté comprendido entre los números racionales dados.

a. 1,23 ☐ $\frac{3}{2}$

b. $\frac{11}{5}$ ☐ 2,23

c. 1,12 ☐ 1,13

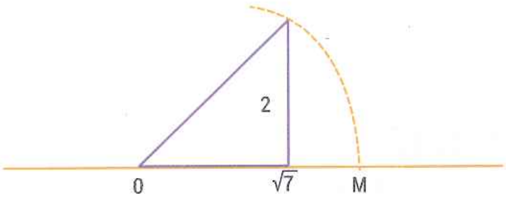
d. 5 ☐ 6

e. $\sqrt{100}$ ☐ 11

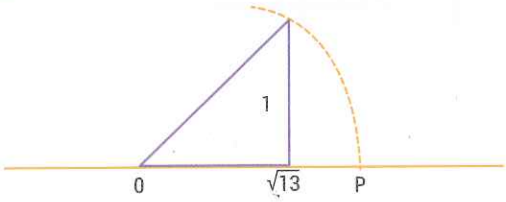
f. $1{,}\overset{\frown}{3}$ ☐ $1{,}\overset{\frown}{4}$

46. Indiquen qué número irracional representa cada letra. Expliquen las respuestas.

a.



b.



DinámicaMente

Reúnanse en grupos, investiguen sobre el "número de oro" y respondan.

a. ¿Cuál es el valor del número de oro?

b. ¿Por qué se lo llama así?

c. ¿En qué áreas está presente?

6. Aproximación y notación científica

▶ SABERES DINÁMICOS

En algunas situaciones no es necesario considerar todas las cifras decimales de un número; por eso, en muchos casos, se usa un valor aproximado. Para aproximar un número, se pueden utilizar dos métodos: por **redondeo** o por **truncamiento.**

- Para **aproximar por redondeo** a una cifra decimal determinada hay que indicar a qué unidad se aproximará y observar la cifra decimal siguiente:

Si la cifra siguiente **es mayor o igual que 5**, se le suma 1 a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.	Si la cifra siguiente **es menor que 5**, queda igual la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.
0,58 aproximada a los décimos es 0,6	*0,21 aproximada a los décimos es 0,2*
2,365 aproximada a los centésimos es 2,37	*8,264 aproximada a los centésimos es 8,26*

- Para **aproximar por truncamiento** se eliminan las cifras que están a la derecha de la unidad a la que se quiere truncar.

Al truncar 13,989 a décimos se obtiene 13,9. *Al truncar 13,989 a centésimos se obtiene 13,98.*

Notación científica

La **notación científica** es una forma abreviada de expresar números muy grandes o pequeños.
Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como producto entre un número cuyo módulo es mayor o igual que 1 y menor que 10, y una potencia de base 10.

Potencias de base 10				
	Exponente positivo	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1\,000$
	Exponente negativo	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$	$10^{-3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Número menor que 10

$8\,700 = \boxed{8{,}7} \,.\, 1\,000 = 8{,}7 \,.\, 10^3$ → $8\,700 = 8{,}7 \,.\, 10^3$

Potencia de base 10 — **Notación científica**

Número menor que 10

$0{,}000256 = \frac{\boxed{2{,}56}}{10\,000} = 2{,}56 \,.\, 10^{-4}$ → $0{,}000256 = 2{,}56 \,.\, 10^{-4}$

Potencia de base 10 — **Notación científica**

Áreas dinámicas [Matemática y Físico-Química]

En Físico-Química se suele utilizar la notación científica para escribir cantidades muy pequeñas.
Por ejemplo, los nanomateriales, se vienen desarrollando desde hace algunos años para responder a las demandas humanas que acompañan el cambio de hábitos y conductas en el estilo de vida. Estos materiales tienen dimensiones nanométricas, es decir, de una escala que refiere a la milmillonésima parte de un metro.

$$1 \text{ nanómetro } (1 \text{ nm}) = \frac{1}{1\,000\,000\,000 \text{ m}} = 10^{-9} \text{ m}$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que al redondear 7,98 a los décimos se obtiene un número entero?
   b. ¿Cómo se expresa en notación científica el número 6 000? ¿Y el 0,09?
   c. Escriban un ejemplo de un número en el que se obtiene lo mismo al redondearlo que al truncarlo a los décimos.

ACTIVIDADES

6. Aproximación y notación científica

47. Completen la tabla.

Número	Aproximación por truncamiento a los décimos	Aproximación por redondeo a los centésimos
14,568		
$\sqrt{5}$		
1,509		
$\frac{1}{7}$		
0,269		
$1,\overset{\frown}{4}$		

48. Escriban un ejemplo para completar cada frase.

a. 17,49 es la aproximación por redondeo de ______.

b. 60,92 es la aproximación por truncamiento de ______.

c. 132,7 es la aproximación por redondeo de ______.

d. 26,42 es la aproximación por truncamiento de ______.

49. Completen la tabla.

Números	Notación científica
89 000 000 000	
	$1,12.10^{4}$
77 000 000	
0,0008	
	$2,8.10^{-7}$
	$5,4.10^{-2}$

50. Escriban en notación científica y resuelvan aplicando propiedades.

a. 0,0000058 .140 000 000 = ______

b. 720 000 . 0,002 . 0,05 = ______

c. 63 000 000 000 : 1 400 000 = ______

d. 0,0000013 : 0,004 = ______

e. 1 400 .120 000 : 0,003 = ______

f. 230 000 . 400 : 0,1 = ______

7. Intervalos reales

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **intervalo real** es un conjunto de números reales que se encuentra comprendido entre dos números reales **a** y **b**, llamados **extremos del intervalo**.
Los **extremos a** y **b** pueden o no estar incluidos. Para distinguirlo se utilizan corchetes cuando se incluye el extremo y paréntesis cuando no se lo incluye.

[a;b] ← intervalo cerrado que incluye los extremos.

(a;b) ← intervalo abierto que no incluye los extremos.

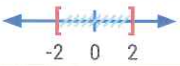
[2;9]	Representa el conjunto formado por todos los números reales mayores o iguales a 2 y menores o iguales a 9.	Es un intervalo cerrado
(1;5)	Representa el conjunto formado por todos los números reales mayores a 1 y menores a 5.	Es un intervalo abierto

• Un intervalo puede incluir solo uno de sus extremos; en ese caso, se llaman **semiabiertos o semicerrados.**

(3;7]	Representa el conjunto formado por todos los números reales mayores a 3 y menores o iguales a 7.	Es un intervalo semicerrado a derecha (o semiabierto a izquierda).
[0;6)	Representa el conjunto formado por todos los números reales mayores o iguales a 0 y menores a 6.	Es un intervalo semiabierto a derecha (o semicerrado a izquierda).

• Se llaman **intervalos infinitos** cuando uno de los extremos es infinito.
(−∞;4) representa el conjunto formado por todos los números reales menores a 4
[8;+∞) representa el conjunto formado por todos los números reales mayores o iguales a 8.

Un conjunto de números reales se puede representar de diferentes maneras:

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Intervalo	Recta numérica
Todos los números reales mayores o iguales a −2 y menores o iguales a 2.	$-2 \leq x \leq 2$	[−2,2]	
Todos los números reales menores que −5.	$x < -5$	(−∞;-5)	

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos números reales hay en el intervalo (1;2)?
   b. ¿Es cierto que los intervalos (1;7) y (1;7] son iguales?
   c. ¿Cuál es el primero y el último número del intervalo (3;5)?

7. Intervalos reales

51. **Completen la tabla.**

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Intervalo
Todos los números reales mayores o iguales a 8		
	$\frac{1}{2} < x \leq 0{,}9$	
		$[-1;\sqrt{2}]$
Todos los números reales menores a 6		

52. **Escriban ∈ (pertenece) o ∉ (no pertenece).**

a. 7 ☐ (7;20)

b. 5 ☐ [5;6)

c. 0,8 ☐ [−∞;0,8)

d. $\frac{3}{5}$ ☐ (0,2;0,6]

e. 2,3 ☐ [2,3;+∞)

f. 1 ☐ (−1;1)

g. π ☐ [−π;π)

h. $\sqrt{3}$ ☐ $(\sqrt{3};2)$

53. **Representen los siguientes intervalos en la recta numérica.**

a. (1;7]

b. (2;+∞)

c. $[\sqrt{5};4]$

d. (−∞;3]

54. **Escriban en lenguaje simbólico los siguientes intervalos.**

a. (7;9]

b. (−∞;3)

c. [0,1;+∞)

d. $[1,\overset{\frown}{2};2]$

55. **Escriban un valor de "m" que cumpla las siguientes condiciones.**

a. $-1 < m \leq 1{,}6$

b. $\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{3}$

c. $2{,}3 \leq m < 2{,}\overset{\frown}{3}$

d. $5 < m < 6$

Integración final

56. Completen con $\mathbb{Q}$ (racional) o $\mathbb{I}$ (irracional), según corresponda.

a. 2,77 ☐

b. $\sqrt{11}$ ☐

c. Número de oro. ☐

d. $-\frac{1}{2}$ ☐

e. $8^{\frac{1}{3}}$ ☐

f. π ☐

57. Descubran la regla de formación de los siguientes números irracionales.

a. 12,113355...

b. 7,0204060...

c. 3,21222324...

d. −5,1030507...

58. Inventen tres números irracionales indicando la regla de formación.

59. Representen en la recta numérica los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{10}$

b. $\sqrt{26}$

c. $\sqrt{17}$

d. $\sqrt{3}$

60. Escriban un número "m" comprendido entre los números dados.

a. $1{,}2 < m < 1{,}\overset{\frown}{2}$

b. $\sqrt{5} < m < \sqrt{6}$

c. $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$

d. $2{,}645 < m < \sqrt{7}$

61. Completen la tabla.

Número	Truncado a décimos	Truncado a centésimos
12,678		
$6{,}\overset{\frown}{7}$		
1,201		
55,232		
0,255		

62. Completen la tabla.

Número	Redondeo a décimos	Redondeo a centésimos
$2{,}\overset{\frown}{3}$		
6,215		
0,885		
$12{,}\overset{\frown}{7}$		
7,064		

63. Escriban un ejemplo para cada caso.

a. 3,9 es el redondeo a décimos de...

b. 1,2 es el truncamiento a décimos de...

c. 7,6 es el redondeo a décimos de...

d. 8,01 es el redondeo a centésimos de...

64. Escriban en notación científica los siguientes números.

a. 130 000 =

b. 0,0027 =

c. 0,005 =

d. 1 800 000 =

e. 0,00009 =

f. 0,012 =

65. **Escriban el número correspondiente a cada notación científica.**

a. $2{,}7 \,.\, 10^6 =$

b. $1{,}9 \,.\, 10^4 =$

c. $5{,}6 \,.\, 10^{-7} =$

d. $2 \,.\, 10^3 =$

e. $7 \,.\, 10^{-5} =$

f. $1{,}1 \,.\, 10^{-1} =$

66. **Resuelvan aplicando propiedades.**

a. $(\sqrt{5} \,.\, \sqrt{3})^2 =$

b. $\sqrt{2} \,.\, (\sqrt{2} + \sqrt{8}) =$

c. $\sqrt{\sqrt{2}} \,.\, \sqrt[4]{4} \,.\, \sqrt[4]{2} =$

d. $5^{\frac{1}{3}} \,.\, 25 =$

e. $(\sqrt{8} - 1)(\sqrt{8} + 1) =$

f. $9\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} =$

67. **Escriban en notación científica y luego resuelvan aplicando propiedades.**

a. $120\,000\,000 : 0{,}006 =$

b. $3\,500 \,.\, 1800 : 0{,}02 =$

c. $0{,}2 : 2\,000\,000 =$

d. $\dfrac{5\,800\,000 \,.\, 1\,100\,000}{0{,}00001} =$

e. $\sqrt{90\,000} : 0{,}000003 =$

f. $(0{,}000002)^2 \, (0{,}002)^3 =$

68. **Escriban V (verdadero) o F (falso).**

a. $\sqrt{32}$ es un número irracional. ☐

b. $1{,}2\overset{\frown}{36}$ es un número periódico mixto. ☐

c. $\frac{7}{8}$ pertenece al conjunto I. ☐

d. Los números decimales exactos son números racionales. ☐

e. El conjunto de los números reales es un conjunto denso. ☐

f. Los números irracionales se pueden escribir como fracción. ☐

69. **Escriban el intervalo que corresponde a cada situación.**

a. Todos los números reales mayores que 8 y menores o iguales que 12.

b. Todos los números reales positivos.

c. Todos los números reales menores que 1.

d. Todos los números reales mayores o iguales que 0,8 y menores que 2.

70. **Completen la tabla.**

Lenguaje simbólico	Intervalo
$1{,}1 \leq x \leq 6$	
	$(9;+\infty)$
$\sqrt{2} > x$	
$\frac{3}{2} < x \leq 4$	
	$[1{,}\overset{\frown}{2};+\infty)$

71. **Representen en la recta los siguientes intervalos.**

a. $(2;6]$

b. $(2;+\infty)$

c. $(-\infty;0{,}2]$

d. $(1;4)$

72. **Indiquen si la siguiente afirmación es correcta. Expliquen la respuesta.**

"El número 4 pertenece al intervalo $(4;8)$".

2 Lenguaje algebraico

8. Expresiones algebraicas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números relacionados entre sí por una o más operaciones. En una expresión algebraica los números se denominan coeficientes y las letras con sus exponentes forman la parte literal.

parte literal

$-8x^7$

coeficiente

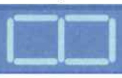
$\frac{2}{5}a$	Cuando la expresión tiene un solo término se denomina **monomio**.
$0{,}5 - 2a$	Cuando la expresión tiene dos términos se denomina **binomio**.
$-4a^2 + 3a + 8a^2 + 6$	En general, cuando hay varios términos se denomina **polinomio**. En este caso los términos que ocupan el lugar primero y tercero se denominan semejantes porque tienen la misma parte literal.

El **valor numérico de una expresión algebraica** se obtiene reemplazando todas las letras por números; luego, se resuelven las operaciones.

Para $b = -2$, el valor numérico de $-4b^2 + 6b - 9$ es -37 porque $-4 . (-2)^2 + 6 . (-2) - 9 = -37$.

Regularidades

Las **regularidades** son una serie de elementos que tienen un patrón o regla de formación que permite determinar cuál será cada elemento según el lugar que ocupe.

En la serie				
Lugar que ocupa	1	2	3	4
Cantidad de palitos	4	7	10	13

La cantidad de palitos que tiene el elemento que ocupa el lugar "n" es "3n + 1".

Operaciones con expresiones algebraicas

Suma y resta de monomios semejantes	Se suman o se restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal.	$8a - 5a - 6a = -3a$ $-7a - 9b + 3b = -7a - 6b$
Multiplicación y división de monomios	Se multiplican o se dividen los coeficientes y las partes literales.	$8a . 5a^2 = 40a^3$ $-16b^7 : 4b^5 = -4b^2$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que b . b . b . b es igual a 4b?
   b. ¿Cuál es el valor numérico de $-5a^2 + 3a - 2a^5$, cuando $a = -1$?
   c. El polinomio $4b - 5b^3 + 12b$, ¿es igual a $16b - 5b^3$?
   d. Escriban la expresión simplificada de $2n + 6n - 8n - 12n$.

8. Expresiones algebraicas

1. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
La suma entre el triple de un número y el cuadrado de −2.	
	$2 . 3 - n^3$
El producto entre el cuadrado de un número y el inverso de 4.	
	$2n - 1$
El opuesto del siguiente de un número.	
	$n + (n + 1)$
La raíz cuadrada del cuádruple de un número.	
La quinta parte de la diferencia entre un número y el opuesto de 7.	
La suma entre el doble de un número y el inverso y opuesto de $\frac{2}{5}$.	
	$\frac{1}{3} . (n - 1)^2$
	$n + (n + 1) + (n + 2)$
La suma entre dos números pares consecutivos.	
La mitad de la raíz cúbica del anterior de un número.	

2. Calculen el valor numérico de cada expresión teniendo en cuenta que a = −2 y b = 3.

a. $3a + b^2$

b. $2a^2 - 1 - b^3$

c. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b^3$

d. $b^2 - 4ab$

e. $\frac{a}{2} . (a - b)^2$

f. $0,\widehat{4}a - a^2$

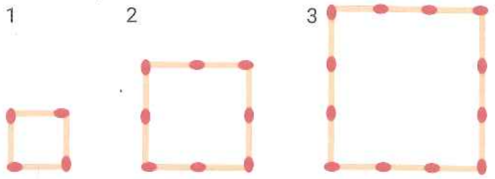
g. $-2b^3 + \frac{1}{2}a$

h. $-4a + 2b - (a - 3b)$

8. Expresiones algebraicas

3. **Observen cada serie y completen la tabla. Luego, evalúen qué expresión algebraica permite calcular la cantidad de fósforos o de cuadraditos que tiene el elemento que ocupa el lugar "n".**

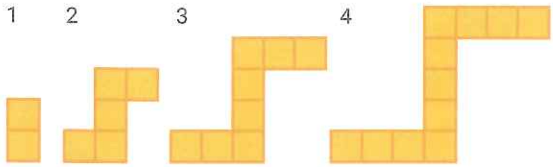
a.



Lugar que ocupa	1	2	3		
Cantidad de fósforos				20	32

Expresión algebraica: ____________

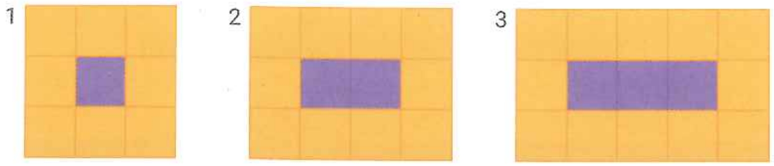
b.



Lugar que ocupa				6	21
Cantidad de cuadraditos	2	5	11		

Expresión algebraica: ____________

4. **Lean atentamente y resuelvan.**



a. Dibujen en sus carpetas los tres elementos que siguen en la siguiente serie.

b. Escriban la cantidad de cuadraditos naranjas que tiene cada figura y la fórmula de la serie.

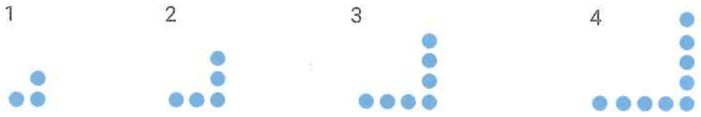
____

c. ¿Es posible que algún elemento de la serie tenga 31 cuadraditos naranjas? Expliquen su respuesta.

____

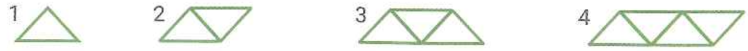
5. **Unan con flechas cada serie con su fórmula.**

a.



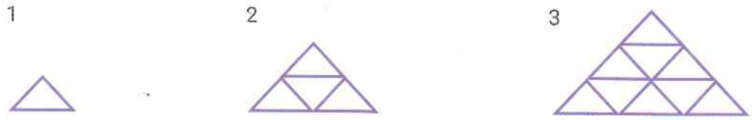
• $2 . (n + 1)$

b.



• $n + 2$

c.



• $2n + 1$

d.

• n^2

6. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen sus respuestas en la carpeta.**

a. $n + n + n = n^3$ ☐

b. $n . n^2 . n^7 = n^{10}$ ☐

c. $2n . 4n = 8n^2$ ☐

d. $n^4 + n^4 = n^8$ ☐

e. $8z - 2z + 3z = 11z$ ☐

f. $2z . 2z . 2z = 8z$ ☐

g. $9z^5 + 4z - 7z^5 = 6z^5$ ☐

h. $12z : 12z = z$ ☐

8. Expresiones algebraicas

7. **Resuelvan las siguientes sumas y restas.**

a. $8m - 5m + 2m =$

b. $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a - 5 =$

c. $5z + 8 - 2z - 6 =$

d. $9b - 15b^2 + 2b + 12b^2 =$

e. $5ab - 9ab + 15ab =$

f. $-8ab + 12bc + 12ab - 15bc =$

g. $8z - 2z - 8 + 4z - 9 =$

h. $3x + 9 + 2x - 8 =$

i. $0,5n + 2,5n^2 - 1n + 1,5n^2 =$

j. $9a^2b + 3a^2b - 7a - 3a^2b =$

8. **Calculen las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

a. $6x \,.\, 18x =$

b. $12x \,.\, (-3x^2) =$

c. $\frac{3}{7}a^5 \,.\, 5a^2 =$

d. $13m^3 \,.\, (-m^4) =$

e. $-9zn^2 \,.\, 2z^3n^4 =$

f. $20x^7 : 5x^4 =$

g. $-24m^3n^5 : 8m^2n^3 =$

h. $\frac{2}{9}z^{15} : \frac{7}{9}z^{12} =$

i. $\frac{-14a^7b^5}{8a^4b^3} =$

j. $\frac{0,\widehat{4}a^3b}{0,\widehat{2}b} =$

9. **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

a. $4xy - 7x \,.\, 5y - 5x \,.\, (-2y) =$

b. $-5z \,.\, 3x - 8z \,.\, 9x - 7 \,.\, (-10x) =$

c. $9a^7 + 3a^2 \,.\, (6a^5 - 8a^5) =$

d. $8t^3 - t \,.\, 5t + 6t \,.\, 2t^2 =$

e. $(-0,3p^7 : 0,2p^4) \,.\, p^2 + \frac{1}{3}p \,.\, p^4 =$

f. $(0,4b^5 - 1,3b^5) : 0,1b^3 =$

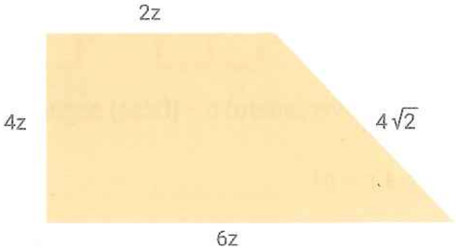
10. **Escriban las expresiones que representan el perímetro y el área de las siguientes figuras en su forma más simple.**

a. Cuadrado.

Perímetro:

Área:

b. Trapecio rectángulo.



Perímetro:

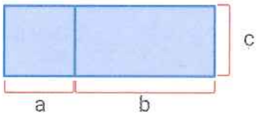
Área:

9. Propiedad distributiva. Factorización

▶ SABERES DINÁMICOS

La **multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta.**

$(3a + 2) \, . \, 4a = 3a \, . \, 4a + 2 \, . \, 4a$
$= 12a^2 + 8a$



$(a + b) \, . \, c = a \, . \, c + b \, . \, c$

$c \, . \, (a + b) = c \, . \, a + c \, . \, b$

$(5b - 2) \, . \, (b + 6) = 5b \, . \, b + 5b \, . \, 6 - 2 \, . \, b - 2 \, . \, 6$
$= 5b^2 + 30b - 2b - 12$
$= 5b^2 + 28b - 12$

La **división** es **distributiva solo cuando la suma y la resta están en el lugar del dividendo.**

$(18b - 9) : 3 = 18b : 3 - 9 : 3$
$= 6b - 3$

$(a + b) : c = a : c + b : c$

$12 : (4a - 1) =$ ⟵ No se puede aplicar la propiedad distributiva.

Factorización

Factor común	Diferencia de cuadrados
$15 + 18 = 3.5 + 3.8$ $= 3. (5 + 8)$ 3 es el dcm entre 15 y 18. 3 se denomina **factor común**.	$64 - 16 = (8 + 4) \, . \, (8 - 4)$
$15b + 12b^3 = 3b \, . \, 5 + 3b \, . \, 4b^2$ $= 3b \, . \, (5 + 4b^2)$ Para poder obtener el factor común de la parte literal se escribe la letra que aparece en todos los términos con su menor exponente.	$a^2 - b^2 = (a + b) \, . \, (a - b)$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/difcua * y analicen la demostración geométrica de la diferencia de cuadrados.

* Enlace acortado de https://youtu.be/yidPXCFQLYc

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Responden y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es correcta la siguiente igualdad? $20 : (10n + 5) = 2n + 4$.
   b. ¿Es cierto que 3x es el factor común de la expresión $9x^2 + 3x$?
   c. ¿Es cierto que $(b + 2)^2 = b^2 + 4$?
   d. Factoricen $z^2 - 4$ usando diferencia de cuadrados.

ACTIVIDADES

9. Propiedad distributiva. Factorización

11. Apliquen la propiedad distributiva.

a. $3y \,.\, (y + 3) =$

b. $(-4 + 3b^3) \,.\, (-2b) =$

c. $(2a - 15) \,.\, (-4b) =$

d. $-x^2 \,.\, (4x^4 + 6x^2 - 7x) =$

e. $(-3b^5 + 2b - 7) \,.\, (-3b^6) =$

f. $(-12n^8 + 9n^5) : (-3n^4) =$

g. $(30z^6 - 20z^4 + 5z^2) : (-5z^2) =$

h. $(m - 4) \,.\, (5 + m) =$

12. Unan con flechas cada expresión con su expresión factorizada correspondiente.

a. $5a^3 - 10a + 15 =$

b. $4a^2 - 2a^3 + 8a =$

c. $\frac{7}{10}a^5 + \frac{1}{15}a^2 - \frac{3}{20}a^3 =$

d. $3 \,.\, (m + n) - 2 \,.\, (m + n)^2 =$

e. $(b + 4)^4 - 1 =$

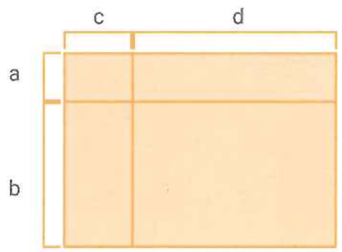
f. $m^6 - n^2 =$

g. $b^4 - 9 =$

h. $\frac{1}{16}b^2 - 1 =$

- $\frac{1}{5}a^2 \,.\, \left(\frac{7}{2}a^3 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}a\right)$
- $(m + n) \,.\, (3 - 2m - 2n)$
- $(b + 5) \,.\, (b + 3)$
- $(b^2 + 3) \,.\, (b^2 - 3)$
- $5 \,.\, (a^3 - 2a^2 + 3)$
- $\left(\frac{1}{4}b - 1\right) . \left(\frac{1}{4}b + 1\right)$
- $(m^3 + n) \,.\, (m^3 - n)$
- $2a \,.\, (2a - a^2 + 4)$

13. Marquen con una X las ecuaciones que permiten calcular el área de la siguiente figura.



a. $2 \,.\, (a + b) + 2 \,.\, (c + d)$ ☐

b. $(a + b) \,.\, c$ ☐

c. $(a + b) \,.\, (c + d)$ ☐

d. $(a + c) \,.\, (b + d)$ ☐

e. $c \,.\, (a + b) + (a + b) \,.\, d$ ☐

f. $a \,.\, c + b \,.\, c$ ☐

g. $a \,.\, c + a \,.\, d + b \,.\, c + b \,.\, d$ ☐

h. $a^2 + b \,.\, c + a \,.\, d + d^2$ ☐

i. $c + a \,.\, d + b \,.\, c$ ☐

10. Cuadrado y cubo de un binomio

▶ SABERES DINÁMICOS

Cuadrado de un binomio

El **cuadrado de un binomio** es un trinomio que se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/cuabin * y miren el video donde se explica el cuadrado de binomio con otros ejemplos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/b0m1ZAuWX2M

$(a + b)^2 = (a + b) . (a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

$(7 + 2)^2 = 7^2 + 2 . 7 . 2 + 2^2$

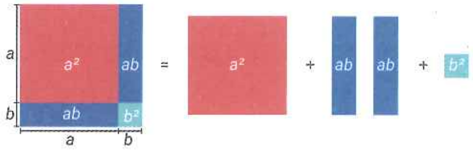
$9^2 = 49 + 28 + 4$

$81 = 81$

$(a + 3)^2 = a^2 + 2 . a . 3 + 3^2$

$(a + 3)^2 = a^2 + 6 . a + 9$

Interpretación geométrica del cuadrado de un binomio:



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cubo de un binomio

El **cubo de un binomio** es un cuatrinomio que se llama **cuatrinomio cubo perfecto**.

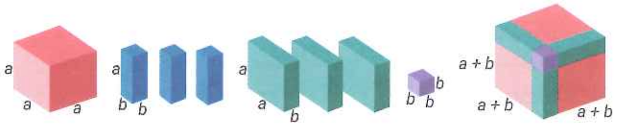
$(a - b)^3 = (a - b) . (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a . a^2 - a . 2ab + a . b^2 - b . a^2 + b . 2ab + b . b^2$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= \mathbf{a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3ba^2}$

Interpretación geométrica del cubo de un binomio:



$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + 3)^3 = a^3 + 3^3 + 3 . a . 3^2 + 3 . 3 . a^2$

$= a^3 + 27 + 3 . a . 9 + 9 . a^2$

$= a^3 + 27 + 27a + 9a^2$

$(5 + 8)^3 = 5^3 + 8^3 + 3 . 5 . 8^2 + 3 . 8 . 5^2$

$= 125 + 512 + 960 + 600$

$= 2\,197$

$(8 - 5)^3 = 8^3 + (-5)^3 + 3 . 8 . (-5)^2 + 3 . (-5) . 8^2$

$= 512 - 125 + 600 - 960$

$= 27$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $(5a^2)^2 = 25a^2$?
   b. ¿Es cierto que $(x + 1)^2 = x^2 + 1$?
   c. Escriban el desarrollo de $(b - 2)^2$.
   d. Escriban el desarrollo de $(n - 2)^3$.

ACTIVIDADES

10. Cuadrado y cubo de un binomio

14. Apliquen la propiedad distributiva y resuelvan.

a. $(-5x^2)^2 =$ ______

b. $\left(-\frac{1}{2}z^3\right)^3 =$ ______

c. $(-3\sqrt{x})^4 =$ ______

d. $(\sqrt{5}\,.\,m\,.\,n^2)^2 =$ ______

e. $\left(-\frac{2}{3}\,.\,w^2\right)^3 =$ ______

f. $(\sqrt{5a^3}\,.\,b^2)^4 =$ ______

15. Desarrollen los siguientes cuadrados y cubos de un binomio.

a. $(2x + 3)^2 =$ ______

b. $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 =$ ______

c. $(3m^2 + 1)^2 =$ ______

d. $(\sqrt{5b} - x)^2 =$ ______

e. $(w - 4)^3 =$ ______

f. $(-5 + n)^3 =$ ______

g. $(-2c + 1)^3 =$ ______

h. $(3m - n)^3 =$ ______

16. Analicen cuál es la expresión factorizada de cada expresión algebraica. Luego, unan con flechas.

a. $4 + 12x + 9x^2$ • $(0{,}5 + x)^2$

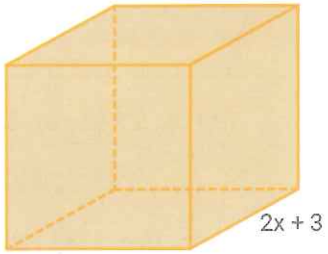
b. $\frac{1}{4} + x^2 + x$ • $(1 - x)^2$

c. $8 + x^9 + 12x^3 + 6x^6$ • $(-x + 1)^3$

d. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$ • $(2 + 3x)^2$

e. $1 - 2x + x^2$ • $(2 + x^3)^3$

17. Describan las características del cubo. Luego, calculen el volumen del siguiente cubo.



Volumen: ______

18. Calculen cuánto vale cada polinomio en el valor pedido.

a. $-4x^6 + 3x - 8x^3 + 4$ en $x = 0$

b. $-9x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 5x - 1$ en $x = 1$

c. $\frac{3}{4}x^6 - 8x^3 + 2x - 1$ en $x = -2$

d. $-8 + 9x - 12x^2 + 3x^3$ en $x = -1$

e. $(x - 4)^2$ en $x = -4$

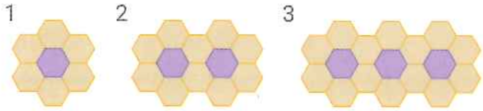
f. $x^4 - 16x^2$ en $x = 2$

19. Observen las series y respondan.

Serie 1

a. Dibujen el cuarto y quinto elemento de la serie.
b. ¿Cuántos palitos contiene el elemento número 20 de la serie?
c. ¿Cuál es la fórmula que permite obtener la cantidad de palitos que tendrá el elemento "n"?

Serie 2

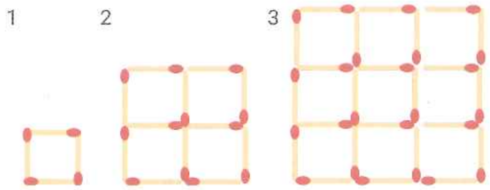


d. Dibujen el cuarto y quinto elemento de la serie.
e. ¿Cuántos hexágonos contiene el elemento número 10 de la serie?
f. ¿Cuál es la fórmula que permite obtener la cantidad de hexágonos que tendrá el elemento "n"?

Serie 3

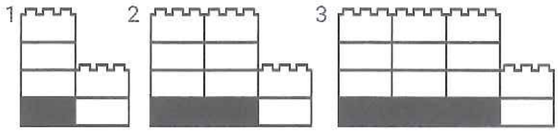
g. Dibujen el cuarto y quinto elemento de la serie.
h. ¿Cuántos puntos tiene el elemento número 8 de la serie?
i. ¿Cuál es la fórmula que permite obtener la cantidad de puntos que tendrá el elemento "n"?

20. Observen la serie y resuelvan.



a. Lucía dice que en la figura que ocupa el cuarto lugar hay 50 fósforos. Roberto dice que la figura que ocupa el lugar 6 de la serie tiene 84 fósforos. ¿Son ciertas las afirmaciones de Lucía y de Roberto?
b. Lucía sostiene que para saber cuántos fósforos hay en la figura que ocupa el lugar n se puede utilizar la fórmula $2n \cdot (n + 1)$.
Roberto dice que se puede utilizar la fórmula $2n^2 + 2n$.
¿Quién de los dos tiene razón? Expliquen sus respuestas.

21. Marquen con una X cuáles de las siguientes expresiones permiten calcular la cantidad de bloques blancos necesarios para una estructura que tiene "n" bloques negros.



a. $3n$ ☐
b. $4n + 2$ ☐
c. $3 \cdot (n + 1) - 1$ ☐
d. $3 \cdot (n - 1)$ ☐
e. $3n + 2$ ☐
f. $7 \cdot (n - 1) - 4n + 9$ ☐

22. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. $8x - 12x + 3x - 4x = -5x^4$
b. $8b + 9b \cdot 3b = 20b$
c. $n^8 + 4 \cdot (n^2)^4 - 5n^3 = 17n^8 - 5n^3$
d. $z^3 + z^3 + z^3 = 3z^3$
e. $\frac{5}{2}y^7 - \frac{5}{2}y^7 = y^7$
f. $4w^2 \cdot 4w^2 \cdot w^2 = 16w^8$
g. $8a^7 : (2a^2)^2 = 2a^3$

23. **Resuelvan las siguientes sumas y restas.**

a. $9x - 5x^2 - 12x + 6x^2 =$

b. $-18y + 25x - 3y - 4y + 15x - 2x =$

c. $-13xy + 5xy - 8xy^2 + 8xy + 2xy^2 =$

d. $2ab - 4ab - 5a + 6b - 2ab + 13a =$

e. $0{,}3z - 0{,}9z + 3 =$

f. $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right) - \left(4 - \frac{2}{5}x^2\right) + 2 =$

24. **Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

a. $-4x \,.\, (-5x) \,.\, 6x =$

b. $10nm^5 \,.\, 2n^7m^2 =$

c. $\frac{1}{8}z^5w \,.\, \left(-\frac{16}{5}w^3\right) =$

d. $-24a^7b^4 : (-8a^5b^2) =$

e. $\frac{0{,}4x^7y^2}{-0{,}2y^2x^5} =$

25. **Resuelvan los siguientes ejercicios combinados.**

a. $(-3b) \,.\, (4b + 5b - 8b) =$

b. $(-9a + 12a^2 + 7a) \,.\, (-2a) =$

c. $(-18ab + 3a - 9b) : 3 + 5ab =$

d. $\frac{-55xy^2 + 22x^2}{11x} - (-3y^2 - 6) \,.\, x - 2xy^2 =$

e. $\left(\frac{2}{3}z + 3w\right) . \left(\frac{1}{4}z - w\right) - \frac{5}{6}z^2 + 4w \,.\, w =$

26. **Obtengan el factor común.**

a. $16x^2 - 8x^4 =$

b. $-2a^3b^2 + 18a^2b^3 =$

c. $\sqrt{7} + \sqrt{7}z - 2\sqrt{7}w =$

d. $-3 \,.\, (a + b) + 5 \,.\, (a + b) - 8 \,.\, (a + b) =$

27. **Factoricen las siguientes diferencias de cuadrados.**

a. $\frac{1}{64}x^2 - 4b^2 =$

b. $16 - a^4 =$

c. $x^8y^6 - x^4y^4 =$

d. $\frac{81}{4}z^2 - 25w^4 =$

28. **Desarrollen los siguientes cuadrados y cubos del binomio.**

a. $(3x - 5y)^2 =$

b. $(2ab - 8)^2 =$

c. $\left(-\frac{1}{2}x^2 - 5y\right)^2 =$

d. $(-z^3 + x)^3 =$

e. $(3a - b)^3 =$

f. $\left(2w - \frac{1}{2}\right)^3 =$

29. **Completen para que se cumplan las igualdades.**

a. $(\square - \square)^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9$

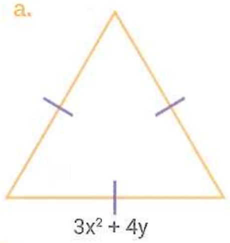
b. $(\square - ab)^2 = \square - 6ab + (ab)^2$

c. $(1 - \square)^3 = 1 - \square + 3z^2 - \square$

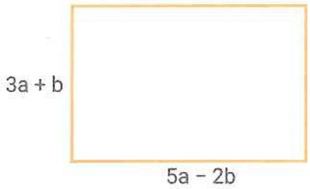
d. $\left(\square - \frac{1}{2}\right)^3 = \square - \frac{3}{2}w^4 + \frac{3}{4}w^2 - \frac{1}{8}$

30. **Calculen el perímetro de cada figura y compartan con sus compañeros cómo lo hicieron.**

a.

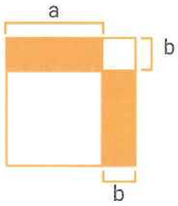


b.

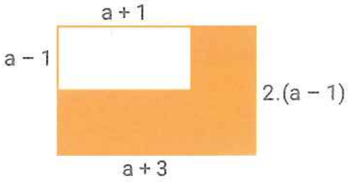


31. **Escriban el área sombreada de dos formas diferentes.**

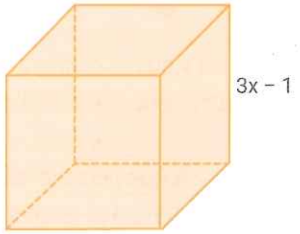
a.



b.



32. **Calculen el volumen del cubo.**



11. Ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **ecuación** a toda igualdad en donde aparece por lo menos un valor desconocido llamado **incógnita**. **Resolver** una ecuación significa encontrar el o los valores que hacen verdadera la igualdad. El valor o los valores encontrados forman el **conjunto solución** de la ecuación.

Para resolver una ecuación se deben tener en cuenta las siguientes propiedades.

- Si en una ecuación se suma o se resta un mismo número a ambos miembros, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.
- Si en una ecuación se multiplica o se divide por un mismo número (distinto de cero) a ambos miembros, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ecuación con una solución	Ecuación con infinitas soluciones	Ecuación sin solución
$5x - 2 = 23$	$6x - x + 3 = 3x + 2x + 3$	$2x - 4 = 2x + 6$
$5x - 2 + 2 = 23 + 2$	$5x + 3 = 5x + 3$	$2x - 2x - 4 = 6$
$5x = 25$	$5x - 5x = 3 - 3$	$0x - 4 = 6$
$5x : 5 = 25 : 5$	$0x = 0$	$-4 \neq 6$
$x = 5$	$0 = 0$	

Verificación

Verificar una ecuación consiste en reemplazar el o los valores encontrados en ella para comprobar si la igualdad se cumple.

Verificación de que $x = 5$ es solución de la ecuación $5x - 2 = 23$:

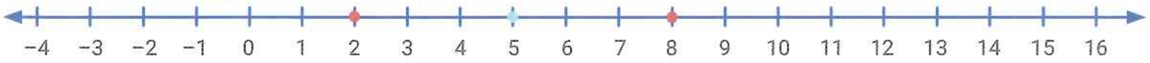
$$5 . 5 - 2 = 23$$
$$25 - 2 = 23$$
$$23 = 23$$

Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver este tipo de ecuaciones, se usa el concepto de valor absoluto, que es la distancia de una expresión al cero.

$$|x - 5| = 3, \text{ entonces } x - 5 = 3 \text{ o } x - 5 = -3$$

$x - 5 = 3$	$x - 5 = -3$
$x = 3 + 5$	$x = -3 + 5$
$x = 8$	$x = 2$



Se dice que 2 y 8 son los números que están a tres unidades del número 5.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/abs * para mirar un video con otros ejemplos de ecuaciones con valor absoluto.

* Enlace acortado de https://youtu.be/FRnkY3pa_ec

11. Ecuaciones

Propiedad fundamental de las proporciones

Cuatro números forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{donde a, b, c y d son números, } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0.$$

En toda proporción se cumple que $a \,.\, d = b \,.\, c$. ← Propiedad fundamental de las proporciones

Algunas ecuaciones se pueden resolver usando la propiedad fundamental de las proporciones.

$$\frac{4x - 1}{2} = \frac{x + 2}{5}$$

$(4x - 1) \,.\, 5 = 2 \,.\, (x + 2)$	1. Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.
$20x - 5 = 2x + 4$	2. Se aplica la propiedad distributiva.
$20x - 2x = 4 + 5$	3. Se agrupan en un mismo miembro los términos semejantes.
$18x = 9$	4. Se opera en cada miembro.
$x = \frac{1}{2}$	5. Se despeja la variable.

Ecuaciones con potenciación

$x^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	1. Se separa en términos.
$x^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$	2. Se agrupan en un mismo miembro los términos semejantes.
$x^2 = 1$	3. Se opera en cada miembro.
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$	4. Se aplica la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad.
$\|x\| = 1$	5. Tengan en cuenta que $\sqrt{x^2} = \|x\|$.
$x = 1$ ó $x = -1$	

Ecuación con radicación

$\sqrt{x} + \frac{1}{5} = \frac{3}{2}$	1. Se separa en términos.
$\sqrt{x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{5}$	2. Se agrupan en un mismo miembro los términos semejantes.
$\sqrt{x} = \frac{13}{10}$	3. Se opera en cada miembro.
$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{13}{10}\right)^2$	4. Se aplica la potencia correspondiente a ambos miembros.
$x = \frac{169}{100}$	5. Se resuelve para hallar el valor de la variable.

Áreas dinámicas [Matemática y Biología]

Cada alimento que ingerimos trae consigo un volumen de agua virtual, es decir, una determinada cantidad de agua que se consume para fabricar cierto producto o bien. Por ejemplo, el volumen de agua virtual de un vaso de jugo de manzana es 190 litros y el de una hamburguesa, 2 400 litros. La propiedad fundamental de las proporciones es útil para calcular cuántos litros de agua son necesarios para preparar cinco vasos de jugo.

j: jugo de manzana; x: litros de agua necesarios.

$$\frac{j}{190} = \frac{5j}{x} \longrightarrow j \,.\, x = 190 \,.\, 5j \longrightarrow x = \frac{950j}{j} \longrightarrow x = 950$$

Son necesarios 950 litros de agua.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Las ecuaciones "$4x - 3 = 5$" y "$9x - 2x + 6 = 20$", ¿tienen el mismo conjunto solución?
   b. ¿Es verdad que la ecuación "$6x - 9 = 2x + 8 + 4x$" no tiene solución?
   c. ¿El conjunto solución de la ecuación "$x^2 - 8 = -4$" es $x = 1$?
   d. Resuelvan la ecuación "$|x - 4| = 5$" e indiquen cuántas soluciones tiene.

11. Ecuaciones

33. **Resuelvan cada ecuación y verifiquen el conjunto solución.**

a. $\frac{2}{7}x + 3 = \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3} . (x - 1) + 2 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c. $3x - \sqrt{\frac{1}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 4x$

d. $(3x - 6) : \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - \frac{1}{2}x$

e. $\left(5x - 2x + \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{3} = -\frac{3}{2}$

f. $\frac{x - 4}{2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

g. $\frac{3}{7}x + \frac{3}{4} : \left(-\frac{9}{16}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}x$

h. $4 . (2x - 2) + 3 = (12x - 3) : (-3) + 12x + 2$

34. **Unan con flechas cada ecuación con su solución.**

a. $6x - (3x + 2) = 4$

b. $-7x + 0{,}5 = \frac{6}{5} - 4x$

c. $\left(-4x + \frac{1}{2} - 2x\right) . \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

d. $\frac{-4 + x}{3} = \frac{1}{2}x + 3$

- $x = -\frac{1}{6}$
- $x = -\frac{7}{30}$
- $x = 2$
- $x = -26$

ACTIVIDADES

11. Ecuaciones

35. Marquen con una X las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{2}{5}x + (\sqrt{5})^0 - 2 = \frac{1}{5}$

- $x = \frac{12}{25}$ ☐
- $x = 3$ ☐
- $x = -3$ ☐

b. $(-9)^3 : (-9)^2 + 0,\widehat{2}x = 0,2x - (-2)^2$

- $x = \frac{1}{5}$ ☐
- $x = -\frac{1}{5}$ ☐
- $x = 225$ ☐

c. $8x + (2 - 0,5)^{-2} = 4 \,.\, (2x - 1) - \left(-\frac{40}{9}\right)^9 : \left(-\frac{40}{9}\right)^8$

- $x = 0$ ☐
- Infinitas soluciones. ☐
- No tiene solución. ☐

d. $\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \frac{1}{3}x = 2x - \frac{1}{5} - \frac{5}{3}x$

- Infinitas soluciones. ☐
- No tiene solución. ☐
- $x = -1$ ☐

e. $\left(-\frac{1}{2}\right) . (2 . \sqrt{x} + 8) = -\frac{1}{3} . \sqrt{x} + \sqrt{72} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

- $x = 225$ ☐
- $x = -15$ ☐
- $x = 15$ ☐

f. $9x^2 - (-2)^3 = 13 - (-x^2 + 2) . (-4)$

- $x = -1$ ☐
- $x = 13$ ☐
- $x = 1$ ☐

36. Unan con flechas cada expresión coloquial con su correspondiente expresión algebraica.

a. La tercera parte de un número.	• $\frac{x-1}{2}$
b. La mitad del anterior de un número.	• $x^2 + \frac{1}{4}x$
c. El anterior de la tercera parte de un número.	• $x - x^2$
d. La diferencia entre un número y su cuadrado.	• $\frac{1}{3}x - 1$
e. La tercera parte de la suma de dos números consecutivos.	• $\frac{1}{4}\left(x + \frac{x}{2}\right)$
f. La suma entre el cuadrado de un número y su cuarta parte.	• $\frac{1\,[x + (x+1)]}{3}$
g. La cuarta parte de la suma entre un número y su mitad.	• $\frac{x}{3}$

11. Ecuaciones

37. Respondan planteando la ecuación.

a. ¿Cuál es el número cuya tercera parte disminuida en 2 unidades es igual al cubo de −1?

b. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado aumentado en 6 unidades es igual al cuadrado del número opuesto e inverso a $\frac{1}{2}$?

c. La suma entre el doble de un número y la tercera parte del mismo número es igual al número disminuido en 3. ¿Cuál es el número?

d. La diferencia entre la raíz cúbica de $-\frac{1}{27}$ y el doble de un número es igual a la tercera parte del mismo número disminuido en 2. ¿Cuál es el número?

e. El doble de la suma entre un número y la cuarta parte de $-\frac{1}{16}$ es igual al opuesto de −3. ¿Cuál es el número?

f. La raíz cuadrada de la diferencia entre el doble de un número y $\frac{2}{3}$ es igual a la sexta parte del opuesto de 12. ¿Cuál es el número?

g. El cociente entre $0,\overset{\frown}{5}$ y $0,0\overset{\frown}{5}$ más un número es igual al doble del siguiente de ese mismo número. ¿Cuál es el número?

11. Ecuaciones

38. Resuelvan las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

a. $3 \cdot |x - 1| = 6$

b. $5 - 3 \cdot |x| = 8 \cdot |x| + 2$

c. $\frac{|x| - 1}{3} = \frac{1}{6}$

d. $|x + 3| - 7 = 9$

e. $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{4} \cdot |-x + 2|$

f. $8 \cdot |x - 2| - 4 = 10 \cdot |x - 2| + 8$

39. Escriban el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{-n + 1}{2n + 1} = \frac{2}{3}$

b. $\frac{3n - 0,2}{2} = \frac{n}{3}$

c. $\frac{n}{-1,\overset{\frown}{9}} = \frac{(-1)^7 \cdot 0,\overset{\frown}{8}}{n}$

d. $\frac{\sqrt{n - 1}}{\sqrt{4}} - \frac{1}{3} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^4}$

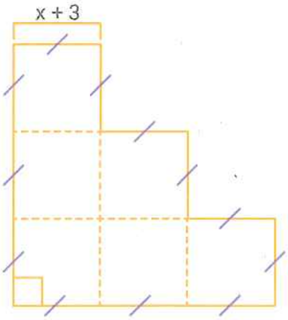
DinámicaMente

Observen la figura y resuelvan.

a. Escriban la expresión más sencilla que representa el perímetro de la figura.

b. Escriban la expresión más sencilla que representa el área de la figura.

c. Calculen cuánto vale x si el perímetro de la figura es 84 cm y el área, 294 cm^2.



12. Problemas con ecuaciones

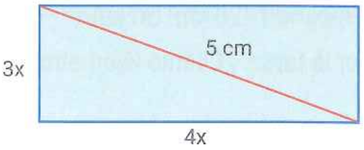
▶ SABERES DINÁMICOS

Para resolver un problema a través de una ecuación, hay que determinar cuál es la incógnita (o variable) y establecer relaciones con los datos para obtener la solución.

Problema 1	Problema 2
Para organizar un acto escolar, la directora distribuyó el largo del patio rectangular de la escuela de la siguiente forma: la cuarta parte para los dos primeros cursos, las dos terceras partes para los cursos del medio y dejó 3 metros para quinto año. ¿Cuál es el largo del patio? x: largo del patio. $\frac{1}{4}x$: cuarta parte para los dos primeros años. $\frac{2}{3}x$: dos terceras partes para los cursos del medio. $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x + 3\text{ m} = x$ $3\text{ m} = x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x$ $3\text{ m} = x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x$ $3\text{ m} = \frac{1}{12}x$ $36\text{ m} = x$ El largo del patio es de 36 metros.	Juan Cruz gastó un tercio de sus ahorros y le prestó a su prima las tres quintas partes del resto. Si aún le quedan \$1 700, ¿cuánto dinero tenía ahorrado? x: dinero que tiene ahorrado. $\frac{1}{3}x$: un tercio de sus ahorros. $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{5}x$: lo que le prestó a su prima. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + \$1\,700 = x$ $\$1\,700 = x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}x$ $\$1\,700 = \frac{4}{15}x$ $x = \$1\,700 : \frac{4}{15}$ $x = \$6\,375$ Juan Cruz tenía ahorrados \$6 375.

En algunos problemas, es necesario verificar si todos los valores del conjunto solución son respuestas al problema.

Calculen los lados del rectángulo, sabiendo que la diagonal mide 5 cm.



Por teorema de Pitágoras:

$$(5\text{ cm})^2 = (3x)^2 + (4x)^2$$
$$25\text{ cm}^2 = 9x^2 + 16x^2$$
$$25\text{ cm}^2 = 25x^2$$
$$25\text{ cm} : 25 = x^2$$
$$1\text{ cm}^2 = x^2$$
$$\sqrt{1\text{ cm}^2} = x^2$$
$$1\text{ cm} = |x|$$
$$x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Los lados del rectángulo miden 3 cm y 4 cm.

Se descarta la solución negativa porque hace que la medida de los lados del rectángulo sea negativa.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si "x" designa el largo de una bandera, ¿cómo se representa en símbolos las tres cuartas partes de ese largo?
   b. Los impuestos de una empresa son $\frac{2}{3}$ de la recaudación (x). ¿Cómo se representa en símbolos la mitad del resto de la recaudación?
   c. Para averiguar la medida del lado de un cuadrado de 25 cm^2 de área se planteó la ecuación $x^2 = 25\text{ cm}^2$. ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado? ¿Hay más de una solución?

ACTIVIDADES

12. Problemas con ecuaciones

40. Resuelvan los siguientes problemas con ecuaciones.

a. Las tres octavas partes de un camino están asfaltadas, la cuarta parte es empedrada y quedan 90 km de tierra. ¿Cuál es la longitud total del camino?

b. Las dos quintas partes de los asientos de un teatro son plateas, hay 36 palcos y la mitad de los asientos que restan es 30. ¿Cuántos asientos tiene el teatro?

c. Una persona gasta la cuarta parte de sus ahorros y luego las tres quintas partes. Si aún tiene $525, ¿cuánto dinero tenía ahorrado?

d. Fede colecciona figuritas de equipos de fútbol: las tres quintas partes son de equipos argentinos, la tercera parte es de equipos europeos y tiene 300 figuritas repetidas. ¿Cuántas figuritas tiene en total? ¿Cuántas son de equipos argentinos?

e. La profesora de Lengua organizó un examen en el que las dos terceras partes de los ejercicios consisten en la lectura y el análisis de textos, una quinta parte, en la elección de opciones y el resto es de narración. Si en total son 15 ejercicios, ¿cuántos de cada tipo hay en el examen?

f. Para ir desde la ciudad de Buenos Aires en auto hasta Mar del Plata se recorren 420 km. Un auto recorrió $\frac{1}{6}$ del camino por la mañana, $\frac{3}{7}$ durante el mediodía, y el resto, por la tarde. ¿Cuánto kilómetros recorrió en cada franja horaria?

g. La altura de un rectángulo mide 5 cm más que la mitad de la medida de la base de ese rectángulo. Si el perímetro de la figura es 70 cm, ¿cuál es la medida de la base y de la altura?

h. El área de un triángulo rectángulo es de 36 cm^2. ¿Cuánto mide la base del triángulo si la altura es el doble de la misma?

13. Inecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Las siguientes desigualdades se denominan **inecuaciones**.

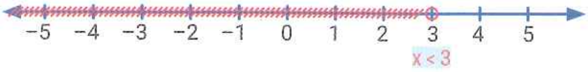
$x > 3$ $\qquad x < -4$ $\qquad 3x \geq 12$ $\qquad 4x \leq -20$

Resolver una **inecuación** significa encontrar el conjunto de valores que la verifican.

Para resolver una inecuación se deben tener en cuenta las siguientes propiedades que permiten obtener inecuaciones equivalentes, es decir, con el mismo conjunto solución.

- Si en una inecuación se suma o se resta un mismo número a ambos miembros, se obtiene una inecuación equivalente a la dada.
- Si en una inecuación se multiplica o divide por un mismo número positivo a ambos miembros, se obtiene una inecuación equivalente formada por una desigualdad que tiene el mismo sentido que la dada.
- Si en una inecuación se multiplica o divide por un mismo número negativo a ambos miembros, se obtiene una inecuación equivalente formada por una desigualdad que tiene distinto sentido que la dada.

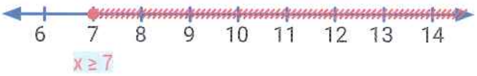
$$3x - 2 < 7$$
$$3x < 9$$
$$3x : 3 < 9 : 3$$
$$x < 3$$



$$S = (-\infty;3)$$

En este caso no se modifica el signo porque se divide por un número positivo (3).

$$-2x + 6 \leq -8$$
$$-2x \leq -14$$
$$-2x : (-2) \geq -14 : (-2)$$
$$x \geq 7$$



$$S = [7;+\infty)$$

En este caso sí se modifica el signo porque se divide por un número negativo (−2).

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/inec * y miren el video donde se analiza en qué situaciones se cambia el sentido de la desigualdad.

* Enlace acortado de https://youtu.be/-xd3IY4ur-o

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $2x = -8$ es una inecuación?
   b. La inecuación $5x > -10$ ¿es equivalente a $x < -2$?
   c. El conjunto solución de la inecuación $-2x \leq 8$ ¿es $S = [-4;+\infty)$?
   d. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $12x > 36$?

ACTIVIDADES

13. Inecuaciones

41. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	Intervalo real
Los números reales menores o iguales que 17.		
	$x > -3$	
		$(-\infty; 6]$
	$x \geq -2$ y $x < 7$	
Los números reales mayores que cero y menores o iguales que 9.		
	$x < -3$ y $x \geq 5$	
		$(-\infty;1] \cup (3;+\infty)$

42. Marquen con una X el conjunto solución de cada inecuación.

a. $\frac{1}{2}x - 3 \leq 4$ • $x > 14$ ☐ • $x \leq 14$ ☐ • $x \leq 7$ ☐

b. $4x - 16 > -24 + 6x$ • $x > 4$ ☐ • $x < -4$ ☐ • $x < 4$ ☐

c. $\sqrt{x - 1} < 2$ • $x < 5$ ☐ • $x < 9$ ☐ • $x < 1$ ☐

d. $1 - 2 . (-x + 3) \geq 4 . (x - 2)$ • $x \geq \frac{3}{2}$ ☐ • $x \leq 3$ ☐ • $x \leq \frac{3}{2}$ ☐

43. Resuelvan cada inecuación y representen en una recta numérica el conjunto solución.

a. $-2x + \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$

b. $5x - 2 \geq 3x - 5$

c. $7 - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}$

d. $2 . (-x + 2) \leq -3 . (2x - 1)$

e. $\frac{x - 1}{3} \geq \frac{3x - 2}{4}$

f. $(2x - 3) : \frac{1}{3} + 2 < 0,\overset{\frown}{2} : 0,0\overset{\frown}{3}$

Integración final

44. Resuelvan las siguientes ecuaciones aplicando propiedades cuando sea necesario. Luego, verifiquen el conjunto solución.

a. $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{4}x - 3$

b. $2 \cdot \frac{7}{4}z - 5 = 3 - 0,\widehat{3}z$

c. $\frac{1}{2} \cdot 2m - 1,2 = \frac{1}{3}m$

d. $\frac{1}{4}w - 1 + \frac{2}{3}w = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}w$

e. $0,5^{-1} \cdot (-2n - 1) = 4 \cdot \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)$

f. $(3v - 6) : \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{9}{2}v\right)$

g. $\frac{3a - 1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$

h. $-5 \cdot (b - 0,\widehat{4}) + 0,\widehat{2} = 2,\widehat{4} - 5b$

i. $-3 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = t + 2$

j. $4 \cdot \left(y - \frac{1}{12}\right) + 3 \cdot \left(y - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(y - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{5}$

k. $|e - 4| = \frac{1}{3} + 0,\widehat{2} : \frac{1}{9}$

l. $\left|x - \frac{1}{3}\right| : 5 = \frac{(-3)^2}{15}$

m. $\frac{1}{7} \cdot (y - 3)^2 - \frac{1}{3} = -0,\widehat{4}$

n. $\frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{a} = \frac{a}{\frac{1}{8}}$

45. Traduzcan al lenguaje simbólico y resuelvan.

a. El triple de un quinto menos la sexta parte de veinte tercios.

b. El cuadrado de la suma entre dos tercios y el opuesto de un octavo.

c. La raíz cuadrada de la diferencia entre tres y $0,\widehat{2}$.

d. La raíz cúbica del siguiente del opuesto de menos veintiséis.

e. El cuadrado de la diferencia entre el doble de seis y el triple del opuesto de cuatro.

f. La suma entre el valor absoluto de $-\frac{1}{3}$ y el cuádruple de $\frac{3}{5}$.

46. Lean atentamente y resuelvan.

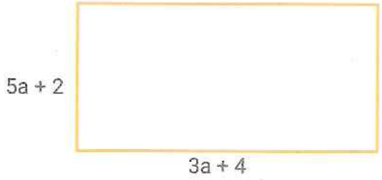
a. ¿Cuáles de las siguientes expresiones sirven para obtener un número par para cualquier valor entero de "n"?

$n + 2$	$2n$	$2n + 1$
$2n + 2$	$2n + 4$	$2n + 5$

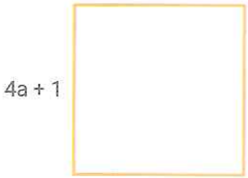
b. De las expresiones anteriores, ¿cuál permite obtener un número impar?

47. Observen las figuras y resuelvan.

Rectángulo



Cuadrado



a. Escriban la expresión que corresponde al perímetro de cada figura.

b. Calculen el perímetro para $a = \frac{2}{3}$ cm.

c. ¿Cuál de las dos figuras tiene mayor perímetro?

48. Resuelvan los siguientes problemas planteando una ecuación.

a. Nicolás gastó dos quintas partes de su dinero en el kiosco, tres décimas partes en la librería y le quedan \$72. ¿Cuánto dinero tenía? ¿Cuánto gastó en el quiosco? ¿Y en la librería?

b. Si en un rectángulo de 70 cm de perímetro, la altura es igual a las tres cuartas partes de la base, ¿cuánto miden la base y la altura?

c. Un tanque estaba lleno de agua y le quitaron 120 litros; luego, las cuatro quintas partes del resto. Si quedan 112 litros en el tanque, ¿qué cantidad de agua tenía el tanque lleno?

49. **Marquen con una X la ecuación que traduce cada problema y luego resuélvanla.**

a. La suma de un número y un medio es igual al triple de dos quintos. ¿Cuál es el número?

- $x + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{2}{5}$ ☐
- $\frac{x}{2} = 3 \cdot \frac{2}{5}$ ☐
- $x + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ ☐

b. La diferencia entre el cuádruple de un número y dos novenos es igual al cuadrado de dos tercios. ¿Cuál es el número?

- $4x - \frac{2}{9} = 2 \cdot \frac{2}{3}$ ☐
- $4x - \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ☐
- $2x - \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ☐

c. La tercera parte de la suma de dos números consecutivos es quince. ¿De qué número se trata?

- $3 \cdot (x + x + 1) = 15$ ☐
- $\frac{1}{3} \cdot (x + 1) = 15$ ☐
- $\frac{1}{3} \cdot (x + x + 1) = 15$ ☐

d. Las dos terceras partes del anterior de un número es igual al siguiente de sus tres quintas partes. ¿Cuál es el número?

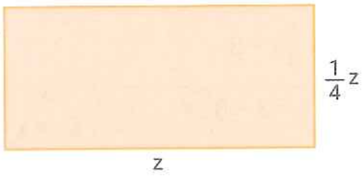
- $\frac{2}{3} \cdot (x - 1) = \frac{3}{5}x + 1$ ☐
- $\frac{2}{3} \cdot (x + 1) = \frac{3}{5}x + 1$ ☐
- $\frac{2}{3} \cdot (x - 1) = \frac{3}{5} \cdot (x + 1)$ ☐

e. Tres amigas reúnen su dinero para ir a cenar. Mili tiene $800 más de lo que tiene Gra. Pato tiene un cuarto del dinero que tienen Mili y Gra juntas. Si en total tienen $6 000, ¿cuánto dinero aporta cada amiga?

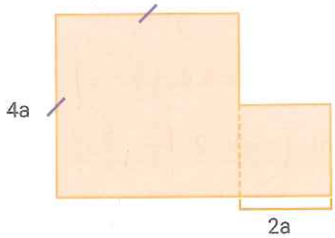
- $x + 800 + \frac{1}{4} \cdot (x + 800) = 6\,000$ ☐
- $x + 2 \cdot (x + 800) + \frac{1}{4} \cdot (2x + 800) = 6\,000$ ☐
- $x + 800 + x + \frac{1}{4} \cdot (2x + 800) = 6\,000$ ☐

50. **Calculen el perímetro de cada figura.**

a. El área del rectángulo es de 16 cm^2.



b. El área de la figura es 2 000 cm^2.



51. **Resuelvan cada inecuación, escriban el conjunto solución y represéntenlo en una recta numérica. Luego, escriban tres números que pertenezcan al conjunto solución.**

a. $0,\widehat{4} \cdot (-2x + 8) - (\sqrt{3})^0 \geq -3$

b. $3x - \frac{1}{2} < x + \frac{1}{3}$

c. $-2 - \frac{1}{9}x \geq 1,\widehat{3}x - 8$

d. $\sqrt{\frac{2}{9} : \frac{1}{2} + 2,\widehat{3}} \cdot (x + 2) > \sqrt{2^4} - 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

e. $\frac{1}{2}x - 4 \leq (8x - 16) : 4 + 3$

52. **Planteen una inecuación en cada caso y resuélvanla. Escriban el conjunto solución y represéntenlo en una recta numérica.**

a. La suma entre el triple de un número y el siguiente de su doble no supera 24.

b. La mitad del siguiente de un número es mayor que la tercera parte de ese mismo número disminuido en 4.

c. La diferencia entre el cuádruple de un número y el opuesto de 2 es menor o igual que la suma entre ese mismo número y la raíz cuadrada de 16.

d. La raíz cúbica del siguiente de la tercera parte de un número es mayor que un quinto.

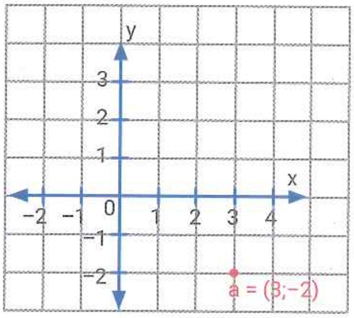
3 Funciones

14. Interpretación de gráficos

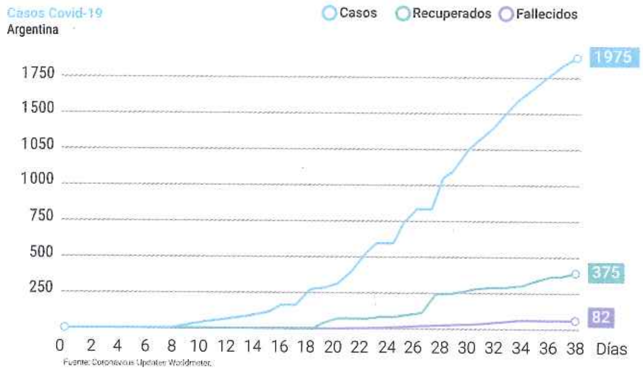
▶ SABERES DINÁMICOS

Un **sistema de ejes cartesianos** está determinado por dos rectas perpendiculares: la horizontal representa el **eje de abscisas** (x), y la vertical, el **eje de ordenadas** (y).

Un punto queda determinado por dos coordenadas: **(x;y)**.



En el siguiente gráfico se muestra la evolución de los casos, los recuperados y los fallecidos con COVID-19 durante los primeros 38 días de pandemia en la Argentina.



TIP

En algunos gráficos que corresponden a puntos aislados se traza una línea para una mejor visualización.

En cada línea del gráfico se relacionan dos variables: tiempo (días) y cantidad de casos/recuperados/fallecidos. El tiempo es la variable independiente y los casos/recuperados/fallecidos, la variable dependiente.
En general, los valores de la variable independiente se representan sobre el eje x y los de la dependiente, sobre el eje y.
A partir de la lectura del gráfico se puede decir que:

- La cantidad de casos fue aumentando mucho más que la cantidad de recuperados y fallecidos.
- La cantidad de recuperados tuvo un aumento importante el día 28 y luego siguió creciendo lentamente.
- La cantidad de fallecidos creció lentamente durante los 38 días.

TEST DE COMPRENSIÓN

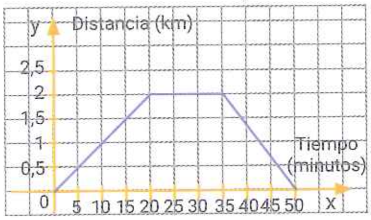
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿El punto (2;3) coincide con el punto (3;2)?
   b. Las escalas que se utilizan para cada uno de los ejes cartesianos, ¿siempre deben ser iguales?
   c. Realicen una tabla donde registren los días en los que se superaron las cantidades de 250, 500, 750, 1 000, 1 250, 1 500 y 1 750 casos.

14. Interpretación de gráficos

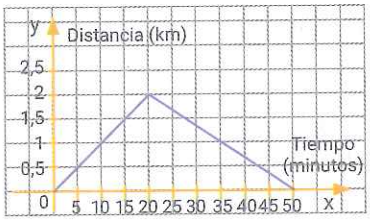
1. Lean atentamente e indiquen cuál de los gráficos corresponde a la siguiente situación. Expliquen la respuesta.

Juan fue desde su casa hasta la casa de su abuela Mecha, que vive a 2 km. Estuvo allí 15 minutos y regresó por otro camino a su casa.

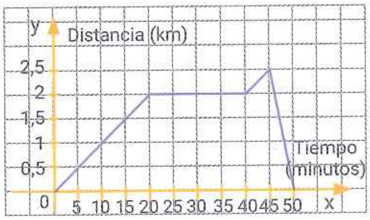
a.



b.

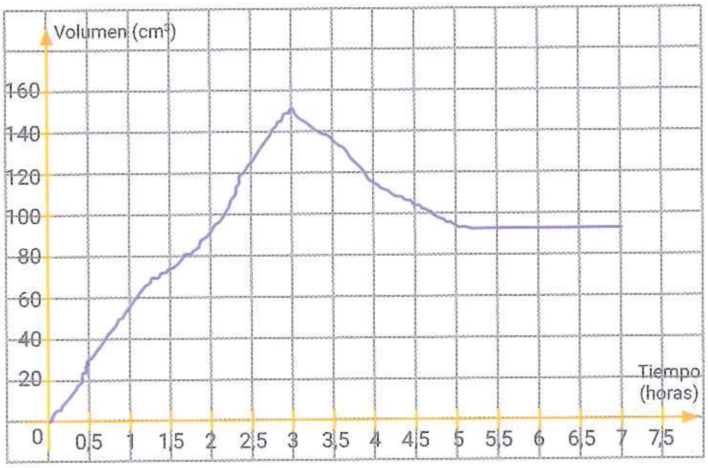


c.



2. Observen el gráfico y respondan.

En el laboratorio Barros están estudiando el comportamiento de un compuesto químico que pasa de un estado líquido a sólido dependiendo del tiempo transcurrido.



a. ¿Cuál fue el volumen máximo del líquido en el transcurso de las 7 horas?

b. ¿Cómo fue la variación del volumen del líquido en el transcurso del tiempo?

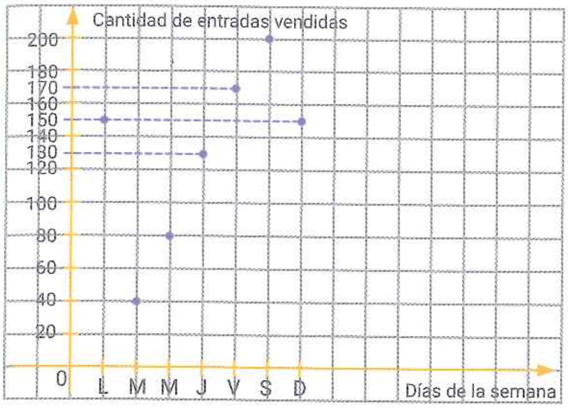
c. ¿En algún momento se mantuvo constante el volumen? ¿Cuándo?

d. ¿En qué período creció el volumen?

14. Interpretación de gráficos

3. **Observen el gráfico y respondan.**

Se realizó la reinauguración de una de las salas más antiguas del cine General Plaza que tiene una capacidad para 200 personas. En el gráfico se representó la cantidad de gente que fue al cine en una semana.



a. ¿Hubo algún día con la sala llena? ¿Cuál?

b. ¿Qué día se vendieron menos entradas?

c. ¿En cuáles días la sala tuvo más de 100 personas?

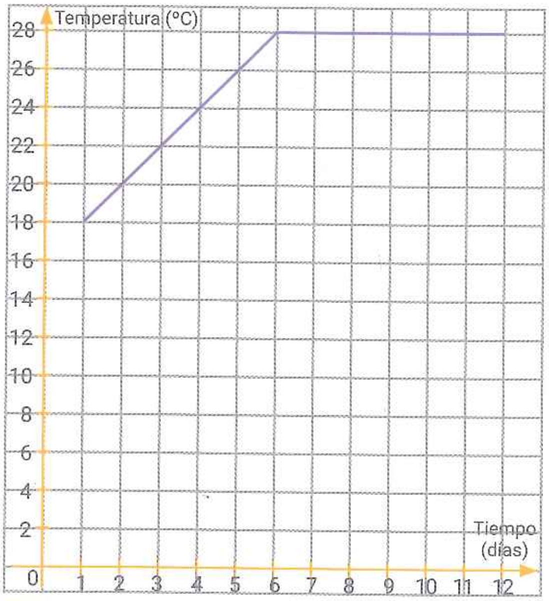
d. ¿Qué día de la semana la sala tuvo 130 personas?

4. **Lean atentamente y resuelvan.**

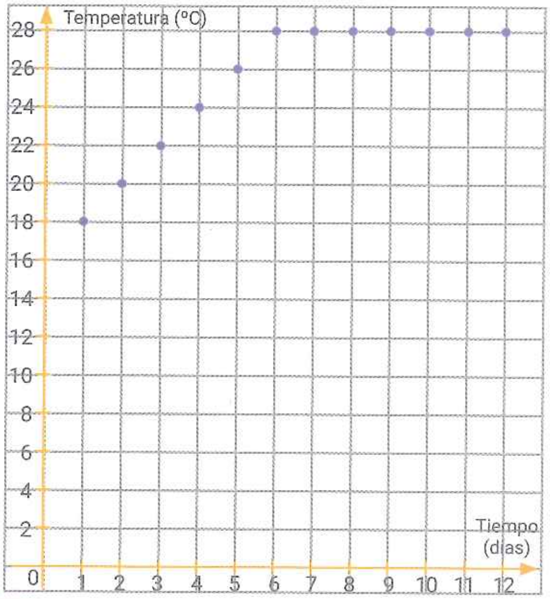
Malena colocó una bomba de calor para climatizar su piscina. Al momento de encender la bomba, la temperatura del agua era de 18 °C. Luego aumentó regularmente hasta alcanzar la temperatura deseada.

a. Marquen con una X el gráfico que representa la situación.

A



B



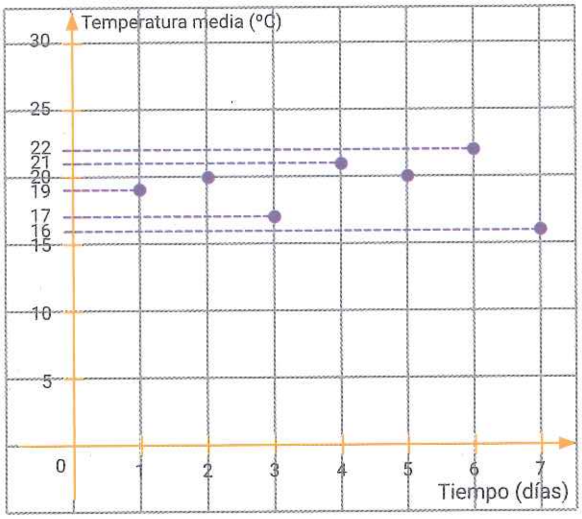
b. ¿Cuántos días pasaron para que la temperatura del agua de la piscina llegue a 24 °C?

c. ¿Cuál fue la temperatura que eligió Malena para mantener el clima de la pileta?

14. Interpretación de gráficos

5. Observen el gráfico y respondan.

El gráfico muestra las temperaturas medias registradas durante la primera semana de septiembre.



a. ¿Cuáles son las variables? Clasifíquenlas.

b. ¿Cuál fue la temperatura máxima?

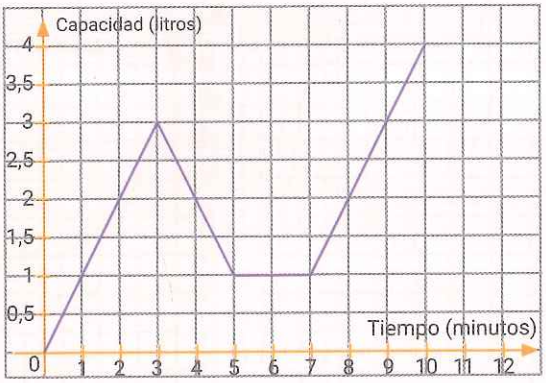
c. ¿Cuál fue la temperatura mínima?

d. ¿En cuáles días la temperatura fue mayor a 20 °C?

e. ¿En cuáles días la temperatura fue menor a 16 °C?

6. Reúnanse en grupos y resuelvan.

a. Inventen unas situación problemática que se corresponda con el siguiente gráfico.



b. Inventen una pregunta donde la respuesta sea: "Durante 2 minutos".

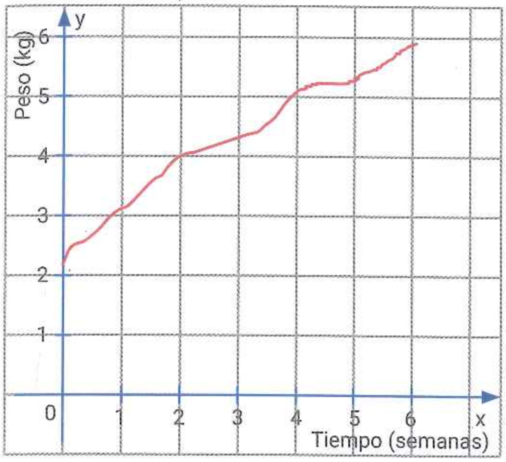
c. Inventen una pregunta donde la respuesta sea: "Bajó la capacidad".

d. ¿En qué períodos aumentó la capacidad?

15. Función

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función** es una relación entre dos variables en la cual a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.
El gráfico muestra el peso de un bebé durante sus primeras 6 semanas de vida.



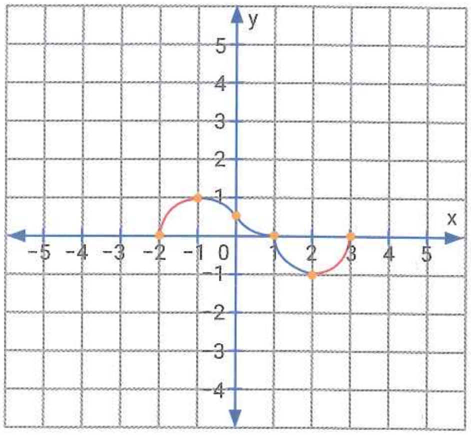
• Para cada valor del tiempo (variable independiente) existe un único valor del peso (variable dependiente).

• Por ejemplo, el peso del bebé a una semana de su nacimiento fue de 3 kg. Se dice que la imagen de 1 es 3 o que la preimagen de 3 es 1.

El **conjunto dominio** de una función está formado por los valores que puede tomar la variable independiente.
El **conjunto imagen** de una función está formado por los valores que toma la variable dependiente.

Análisis de gráficos

Para **analizar el gráfico de una función** hay que tener en cuenta distintos elementos.



• **Ceros** o **raíces**: son los puntos donde el gráfico intersecta al eje x.
$x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ son los ceros o raíces de la función.

• **Ordenada al origen**: es el punto donde el gráfico interseca al eje y.
$y = 0,5$ es la ordenada al origen de la función.

• **Máximo relativo**: son puntos en donde la función viene creciendo y comienza a decrecer.
En $x = -1$ hay un máximo relativo.

• **Mínimo relativo**: son puntos en donde la función viene decreciendo y comienza a crecer.
En $x = 2$ hay un máximo relativo.

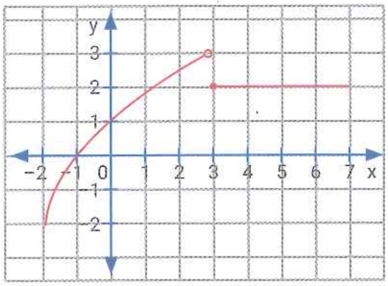
• Una **función es creciente** cuando al aumentar los valores de la variable x, aumentan los valores correspondientes de la variable y.
En el gráfico, con color rojo, se observa que el intervalo de crecimiento está en (−2;−1) U (2;3).

• Una **función es decreciente** cuando al aumentar los valores de la variable x, disminuyen los valores correspondientes de la variable y.
En el gráfico, con color azul, se observa que el intervalo de decrecimiento está en (−1;2).

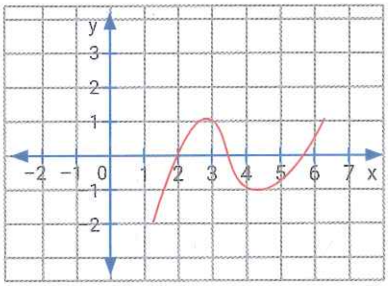
15. Función

Se puede identificar si una relación entre dos variables es función mirando su gráfico. Para ello, se debe tener en cuenta que para cada valor de la variable independiente existe un único valor de la variable dependiente.

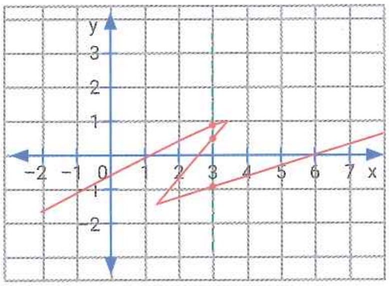
A



B



C



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/qfun* y miren el video que los ayudará a determinar si una relación es función.

* Enlace acortado de https://youtu.be/TUL7grzrb-I

Los gráficos A y B corresponden a funciones, ya que para cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. El gráfico C no corresponde a una función.

Por ejemplo, para x = 2 existen tres valores de y.

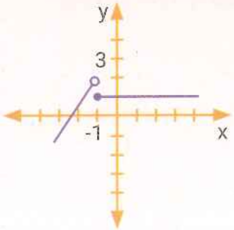
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El dominio de una función ¿puede ser un conjunto menor al de los números reales?
   b. En el punto (−3;2) perteneciente a una función, ¿cuál es la imagen y cuál es la preimagen?
   c. Realicen dos ejemplos de gráficos que no sean función.

ACTIVIDADES

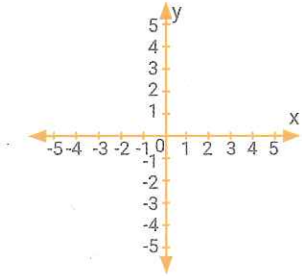
15. Función

7. Reúnanse en grupos y respondan: ¿qué valor tiene la función en x = −1?

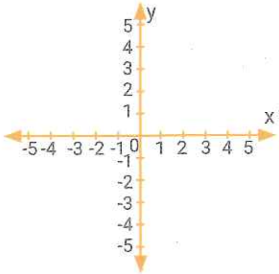


8. Grafiquen lo pedido en cada caso.

a. Una relación que sea función.

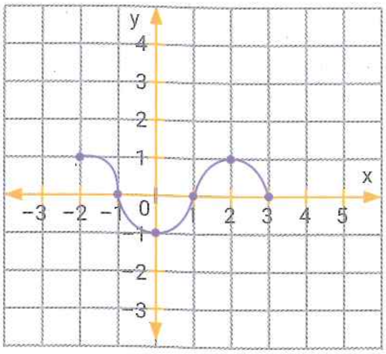


b. Una relación que no sea función.



15. Función

9. Observen el gráfico y respondan.



a. ¿Es función? ______

b. ¿Cuál es el dominio? ¿Y la imagen? ______

c. ¿Cuál es la imagen de 2? ______

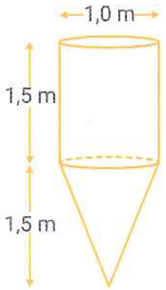
d. ¿Cuál es la preimagen de 1? ______

e. Completen.

- Ceros o raíces: ______
- Ordenada al origen: ______
- Máximo: ______
- Mínimo: ______
- Intervalo de crecimiento: ______
- Intervalo de decrecimiento. ______

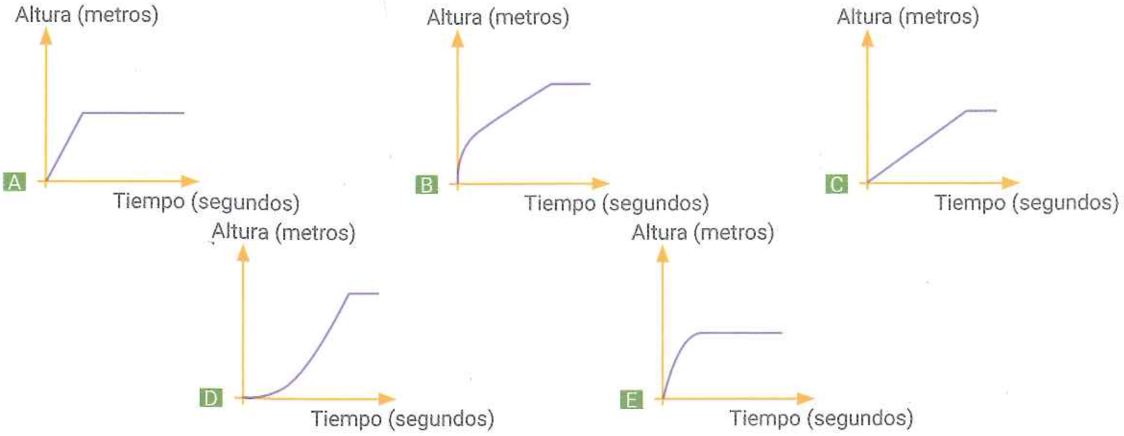
10. Lean atentamente y resuelvan.

Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en el dibujo. Inicialmente el depósito estaba vacío, pero se fue llenando con agua a razón de un litro por segundo.



Depósito de agua

¿Cuál de los siguientes gráficos muestra la altura que alcanza el agua en el depósito en función del tiempo? Expliquen la respuesta.

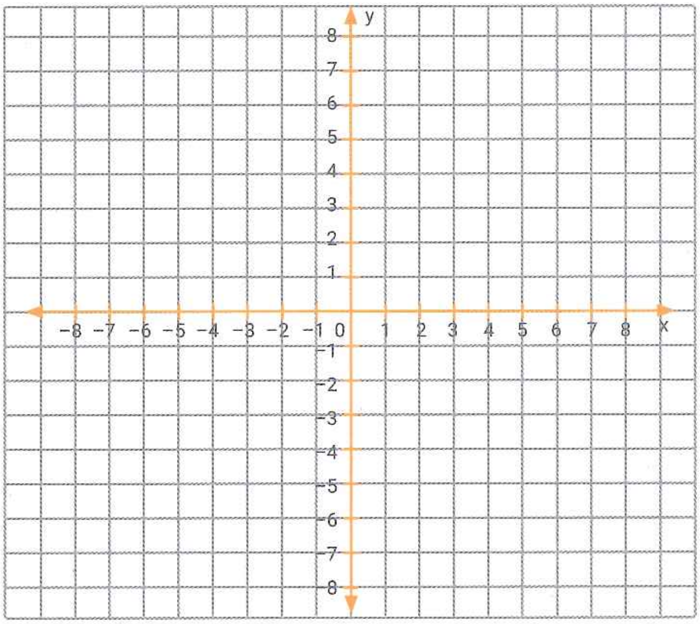


15. Función

11. **Realicen el gráfico que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.**

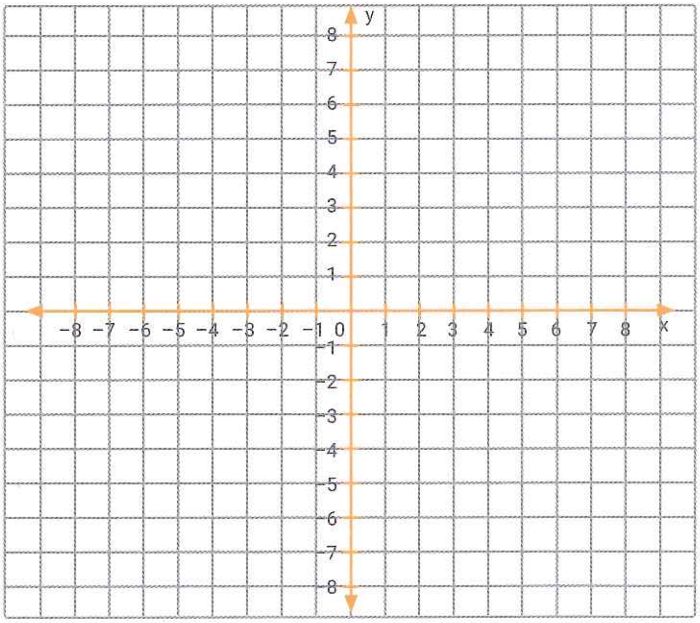
a.

- Que sea función.
- Dominio: [−5;3)
- Imagen: [−8;6]
- f(2) = 4
- Que la preimagen de 4 sea 0 y 2.
- Ceros o raíces: −2 y 3.
- Ordenada al origen: y = 4
- Máximo: x = 1
- Mínimo: x = 5
- Intervalo de crecimiento: (−5;1) U (5;8)
- Intervalo de decrecimiento: (1;5)



b.

- Que sea función.
- Dominio: (−5;8]
- Imagen: [−3;5]
- f(−3) = 0
- La preimagen de 3 sea 3 y 6.
- Ceros o raíces: −3; 2 y 8.
- Ordenada al origen: y = −3
- Máximo: x = 4
- Mínimo: x = 0
- Intervalo de crecimiento: (0;4)
- Intervalo de decrecimiento: (−5;0) U (4;8)



DinámicaMente

Respondan.

a. ¿Existe una función que no sea ni creciente ni decreciente? Si es así, ¿qué características tiene?

b. Es posible que una función tenga dos preimágenes para un punto.

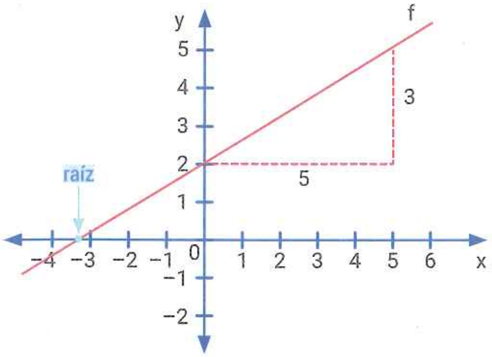
c. ¿Cuál es la diferencia entre una función cuyo dominio es [−2;5) y otra cuyo dominio es (−2;5]?

16. Función lineal

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **función lineal** a aquella cuya fórmula es $y = mx + b$.
Los números **m** y **b** reciben el nombre de **pendiente** y **ordenada al origen**, respectivamente.

El siguiente gráfico corresponde a la función $y = \frac{3}{5}x + 2$ *[o se puede escribir:* $f(x) = \frac{3}{5}x + 2$*].*

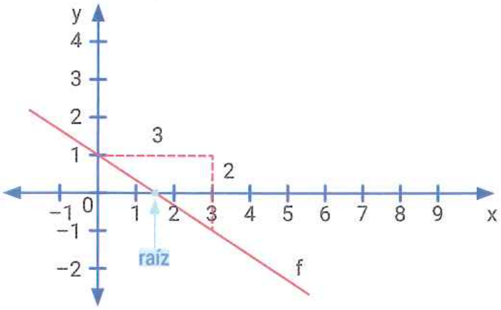


Cuando la variable **x** aumenta en 5 unidades, la variable **y** aumenta en 3 unidades. Esta variación está representada por la **pendiente** de la recta que es igual a $\frac{3}{5}$.

La recta intersecta al eje **y** en el punto (0;2) (corresponde a la **ordenada al origen**).

La función $y = \frac{3}{5}x + 2$ *es lineal.*

El siguiente gráfico corresponde a la función $y = -\frac{2}{3}x + 1$.



Cuando la variable **x** aumenta en 3 unidades, la variable **y** disminuye en 2 unidades. Esta variación está representada por la pendiente negativa de la recta que es igual a $-\frac{2}{3}$.

La recta intersecta al eje **y** en el punto (0;1) (ordenada al origen).

La función $y = -\frac{2}{3}x + 1$ *es lineal.*

La **raíz de una función** es la abscisa del punto en donde la recta interseca al eje x. Para encontrar la raíz, hay que igualar la fórmula de la función a la ecuación del eje x (y = 0) y resolver.
Por ejemplo, para encontrar la raíz del segundo caso, se debe plantear la siguiente ecuación.

$-\frac{2}{3}x + 1 = 0$ Se iguala la fórmula de la función a 0.

$-\frac{2}{3}x = -1$ Se resuelve la ecuación.

$x = -1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ es la raíz de la función.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/flin* y observen cómo varía el gráfico de la función lineal teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada al origen.

* Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/dF2ZXd3d#-material/RuJcZnv3

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La recta representada por x = −3 ¿es función?
   b. ¿Cómo es la recta representada por y = 3? ¿Es función? ¿Cuál es su pendiente?
   c. ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen en la función y = 3x?

ACTIVIDADES

16. Función lineal

12. Identifiquen cuáles de las siguientes funciones son lineales. Indiquen la pendiente, la ordenada al origen y grafiquen en el caso que lo sean.

a. $y = -3x + 1$

Pendiente: ☐

Ordenada al origen: ☐

b. $y = 5 - x$

Pendiente: ☐

Ordenada al origen: ☐

c. $y = 3$

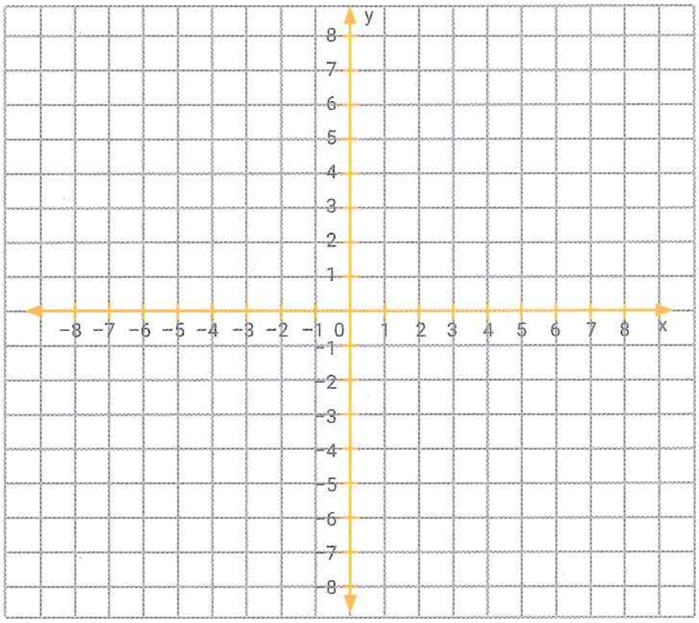
Pendiente: ☐

Ordenada al origen: ☐

d. $y = x^2$

Pendiente: ☐

Ordenada al origen: ☐



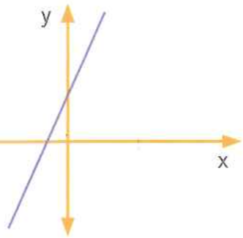
13. Escriban la letra del gráfico que le corresponde a cada función lineal.

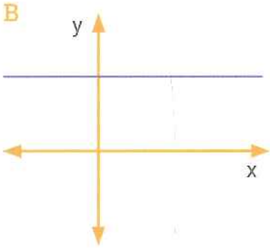
a. $y = ax + b$, con $a > 0$ y $b > 0$ Le corresponde el gráfico ☐.

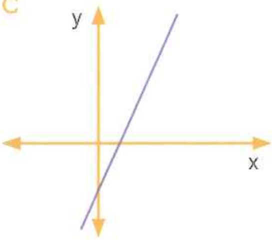
b. $y = ax + b$, con $a < 0$ y $b > 0$ Le corresponde el gráfico ☐.

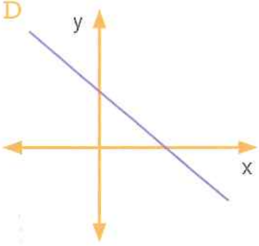
c. $y = ax + b$, con $a > 0$ y $b < 0$ Le corresponde el gráfico ☐.

d. $y = ax + b$, con $a = 0$ y $b > 0$ Le corresponde el gráfico ☐.

A


B


C


D


14. Lean atentamente y resuelvan.

Cayetano contrató un plan telefónico con un abono fijo de $350 en el cual tiene 3 gigas para navegar durante todo el mes y Whatsapp ilimitado. Cada llamada que realice se fracciona por minuto y su valor es de $1,50.

a. ¿Cuál es la fórmula que representa la situación? ____________________

b. ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen? ____________________

c. ¿Cuánto debería abonar en la próxima factura si sabe que habló 5 minutos? ¿Y si habló 24 minutos?

____

d. Grafiquen la función en sus carpetas.

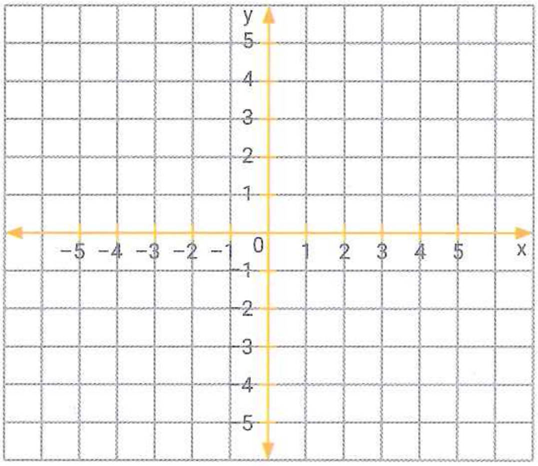
15. Resuelvan.

Malena construyó una tabla de valores para realizar el gráfico de la función lineal $y = \frac{5}{3}x + 2$. Cuando fue a realizar el gráfico, notó que algo había hecho mal.

x	y
3	7
−1	$\frac{1}{3}$
5	9
0	2

a. Encuentren el error en la tabla y corríjanlo. Expliquen qué error piensan que cometió.

b. Realicen el gráfico de la función.



16. Tengan en cuenta la función $y = \frac{3}{5}x - 2$ y respondan.

a. ¿Cuál es la pendiente?

b. ¿Cuál es la ordenada al origen?

c. ¿Cuál es la imagen de 5?

d. El punto (−2;3), ¿pertenece a la función?

17. Lean atentamente y respondan.

Bautista dice que si una función lineal tiene como ordenada al origen 2 y pasa por el punto (3;17), entonces su pendiente es 5. ¿Es correcto? ¿Por qué?

18. Resuelvan.

Un empleado cobra $1 500 fijos por día de trabajo más $50 por cada producto que repara.

a. Completen la tabla.

Cantidad de productos que repara	7		20	
Importe a cobrar ($)		2100		2900

b. ¿Cuánto cobra el empleado un día que repara 30 productos?

c. ¿Es posible que un día cobre $1 655?

d. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa el importe a cobrar en función de la cantidad de productos que repara? Expliquen la respuesta.

Gráfico A

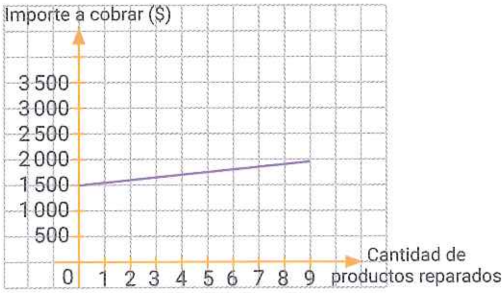
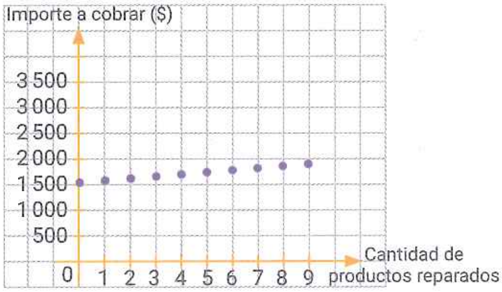


Gráfico B



19. Lean atentamente y resuelvan.

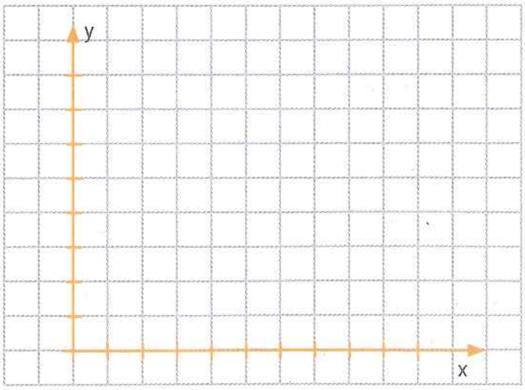
El agua de la pileta de Bruno cubre una altura de 30 cm y tiene una manguera que le agrega unos 15 cm de altura en una hora.

a. ¿Cuál es la ecuación que permite calcular el nivel de altura del agua de su pileta?

b. ¿Cuál será el nivel del agua a las 5 horas de poner a llenar la pileta?

c. Comparen la respuesta del ítem anterior con sus compañeros e indiquen cuál es el conjunto imagen de la función.

d. Realicen el gráfico de la función que represente la situación.



17. Ecuación de la recta

▶ SABERES DINÁMICOS

Para escribir la **ecuación de la recta** se necesita conocer la **pendiente** y la **ordenada al origen**.

Ecuación de la recta: $y = mx + b$

m: pendiente — b: ordenada al origen

• Para escribir la ecuación de la recta conociendo la **pendiente** y un **punto** que pertenece a la misma, se deben reemplazar los datos conocidos en la ecuación general de la recta para obtener la ordenada.

Datos: pendiente: −3. Pasa por el punto (−1;2).

$y = mx + b$

$2 = -3 \,.\, (-1) + b$ — *Se reemplaza "x" por −1; "y" por 2, que son las coordenadas del punto que pertenece a la función, y "m" por −3 que es la pendiente.*

$2 = 3 + b$

$2 - 3 = b$ — *Se despeja la ordenada al origen (b).*

$-1 = b$ — *Entonces como $m = -3$, $b = -1$, la ecuación es $y = -3x - 1$.*

• Para escribir la ecuación de la recta conociendo **dos puntos** que pertenecen a la misma, hay que encontrar el valor de la pendiente y la ordenada.

Datos: pasa por los puntos a = (−1;3) y b = (5;−4).

La ecuación de la pendiente de la recta conociendo dos puntos es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$m = \frac{-4 - 3}{5 - (-1)}$ — *1. Se reemplazan las coordenadas de los puntos a y b.*

$m = -\frac{7}{6}$ — *2. Se resuelve para encontrar el valor de m.*

$y = mx + b$ — *3. Se reemplaza el valor de m y uno de los dos puntos que pertenecen a*

$3 = -\frac{7}{6} \,.\, (-1) + b$ — *la recta.*

$3 - \frac{7}{6} = b$ — *Se despeja la ordenada al origen (b).*

$\frac{11}{6} = b$ — *Entonces como $m = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{11}{6}$, la ecuación es $y = -\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}$.*

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ecre* y miren el video donde se explica otra forma de encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/bo3JsAc9CbE

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que el punto (2;3) pertenece a la recta y = 2x + 1?
   b. ¿Es posible determinar la ecuación de la recta conociendo solo la pendiente?
   c. Encuentren la ecuación de una recta con pendiente 1 y que pasa por el origen de coordenadas.

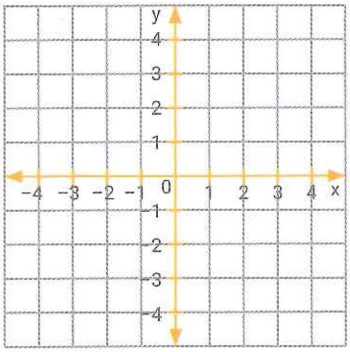
ACTIVIDADES

17. Ecuación de la recta

20. Escriban la fórmula de cada recta teniendo en cuenta los datos. Luego, represéntenlas en los ejes cartesianos.

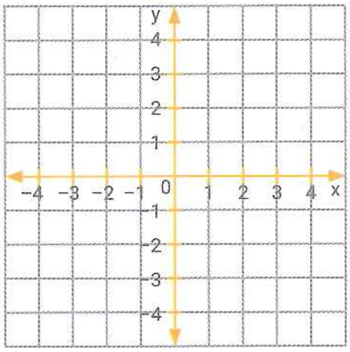
a. Pendiente: 3
Ordenada al origen: 1

y =



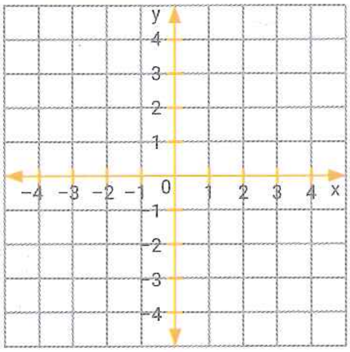
b. Pendiente: 2
Ordenada al origen: 0

y =



c. Pendiente: $-\frac{1}{2}$
Ordenada al origen: 2

y =



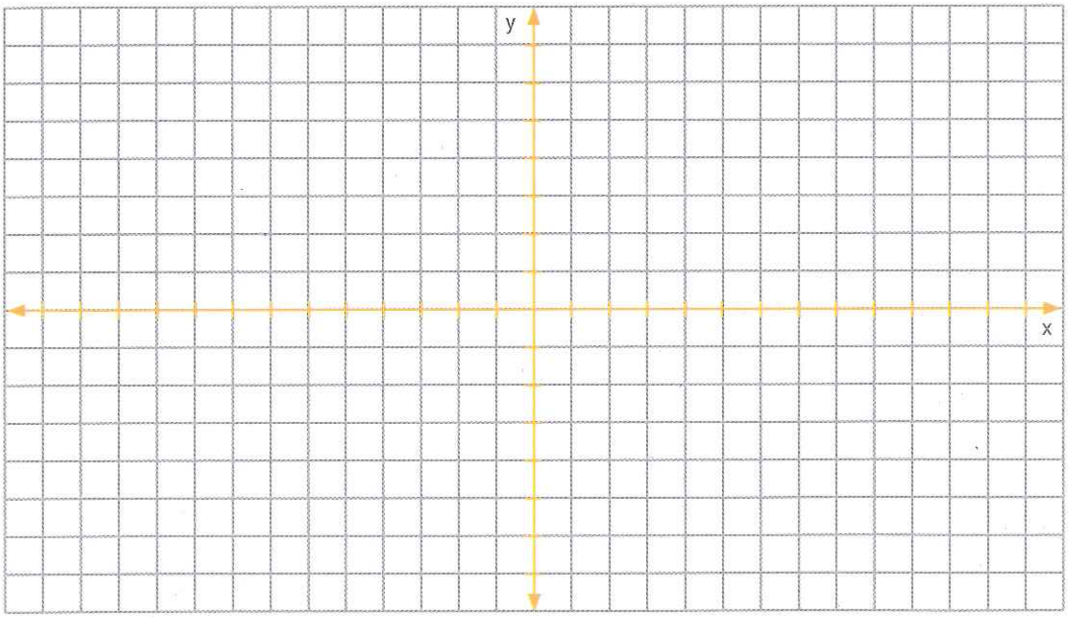
21. Escriban la ecuación de cada recta teniendo en cuenta los datos. Luego, represéntenlas en un sistema de ejes cartesianos.

a. Recta P que pasa por el punto a = (2;3) y tiene pendiente −1.

b. Recta Q que pasa por el punto b = (−2;0) y tiene pendiente 5.

c. Recta R que pasa por el punto c = (0;0) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

d. Recta S que pasa por el punto d = (−1;−2) y tiene pendiente −3.



17. Ecuación de la recta

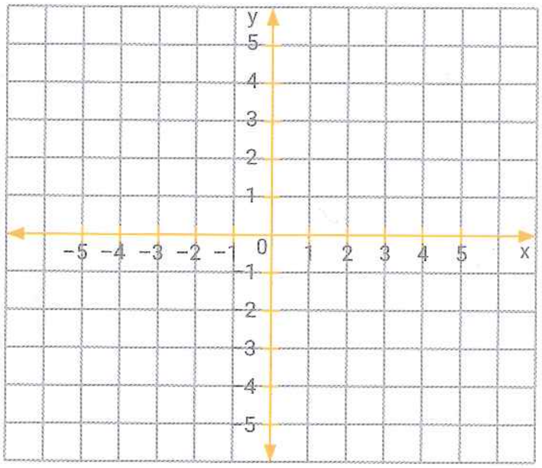
22. Escriban la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. Luego, grafiquen todas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

a. Recta A que pasa por p = (−1;2) y q = (0;3).

b. Recta B que pasa por r = (−3;1) y s = (−2;4).

c. Recta C que pasa por t = (0;0) y u = (−4;2).

d. Recta D que pasa por v = (−1;−2) y w = (3;−5).



23. Lean atentamente y resuelvan.

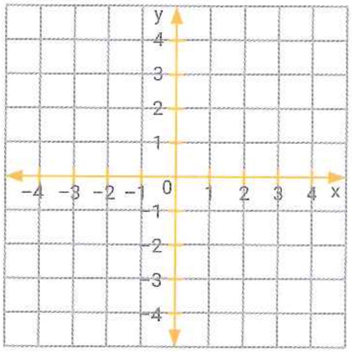
Mariano copió parte de una tabla que corresponde a una ecuación de la recta.

x	1	0	2		−1	−2
y	$\frac{5}{2}$	1		7		

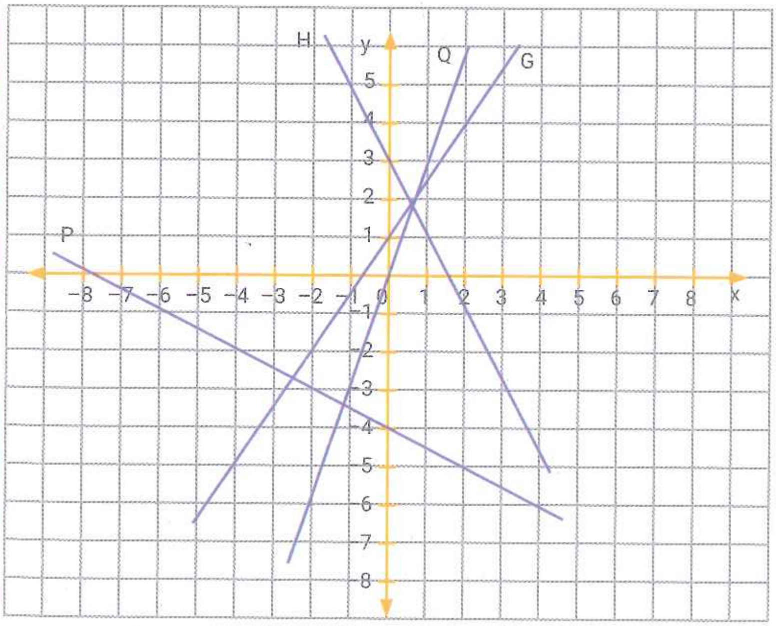
a. Escriban la ecuación de la recta que corresponde a la tabla anterior.

b. Completen la tabla.

c. Grafiquen la recta.



24. Observen el gráfico e indiquen la pendiente y la ordenada al origen de cada recta.



a. Recta G

Pendiente:

Ordenada al origen:

b. Recta H

Pendiente:

Ordenada al origen:

c. Recta P

Pendiente:

Ordenada al origen:

d. Recta Q

Pendiente:

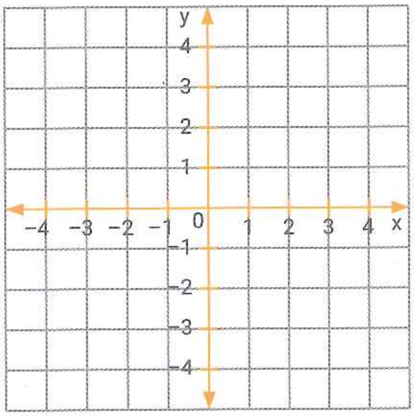
Ordenada al origen:

17. Ecuación de la recta

25. **Resuelvan.**

Los puntos r = (1;2), s = (−1;−3) y t =(x;y) determinan un triángulo.

a. Representen los puntos r y s en los ejes cartesianos.



b. Indiquen coordenadas para que el punto t forme un triángulo con los puntos r y s. ¿La respuesta es única?

c. Escriban las ecuaciones de las rectas que incluyan cada lado del triángulo.

26. **Escriban la ecuación de la recta que incluya los tres puntos, cuando sea posible.**

a. (1;3), (−1;−1), (2;5)

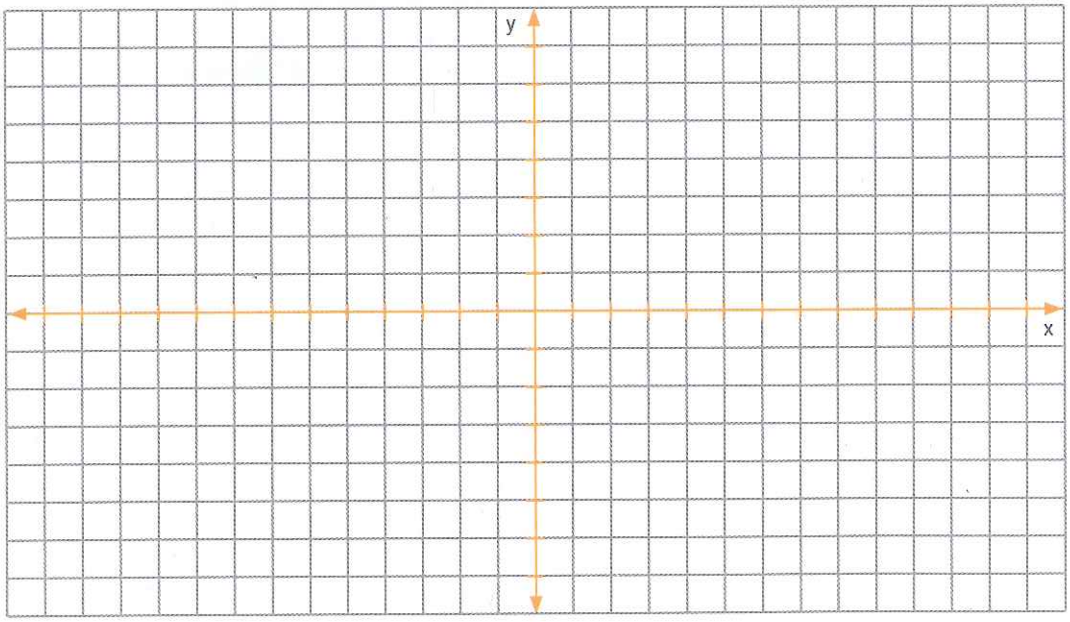
b. (0;6), (2;3), (4;1)

c. (1;1), (2;4), (0;−2)

d. (0;0), (3;−2), $\left(-1;\frac{2}{3}\right)$

e. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(5;-\frac{1}{2}\right)$

27. **Representen los puntos y las rectas de la actividad anterior y verifiquen sus respuestas.**



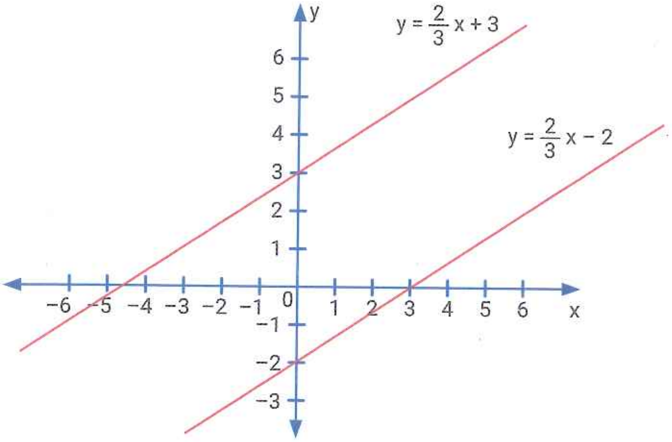
18. Rectas paralelas y perpendiculares

▶ SABERES DINÁMICOS

Rectas paralelas

Dos **rectas** son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente.

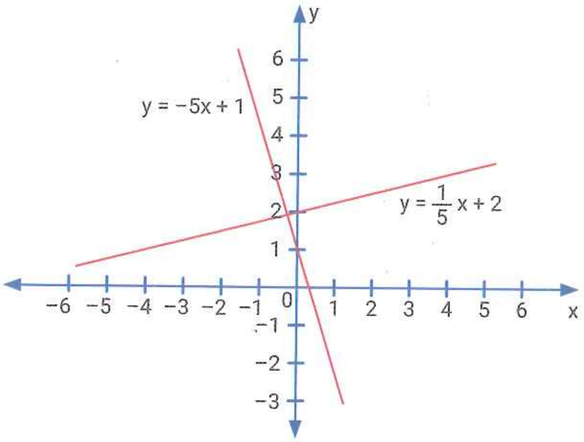
$y = \frac{2}{3}x + 3$ es paralela a $y = \frac{2}{3}x - 2$.



Rectas perpendiculares

Dos **rectas** son **perpendiculares** cuando sus pendientes son números inversos y opuestos.

$y = \frac{1}{5}x + 2$ es perpendicular a $y = -5x + 1$.



Áreas dinámicas [Matemática y la construcción]

Un **nivel** es un instrumento de medición que se utiliza en la construcción para determinar la inclinación de un elemento. Por ejemplo, es muy útil para colocar estantes y lograr que queden nivelados y paralelos entre sí.
Un nivel muy utilizado es el **nivel de burbuja.** Este instrumento posee un pequeño tubo transparente con líquido (alcohol o éter) y una burbuja de aire en su interior. Si la burbuja se encuentra simétricamente entre las dos marcas, el instrumento indica un nivel preciso que puede ser horizontal, vertical u oblicuo.

Nivel de burbuja.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que para que dos rectas sean paralelas la ordenada al origen debe ser la misma?
   b. ¿Es cierto que las rectas "$y = 2x + 3$" y "$y = -2x - \frac{1}{3}$" son perpendiculares?
   c. Escriban la fórmula de una recta con pendiente 0. ¿Existe una ecuación de la recta que sea paralela a ella?

18. Rectas paralelas y perpendiculares

28. Unan con flechas las rectas paralelas.

a. $y = 3x + 4$
b. $y = -\frac{1}{5}x - 2$
c. $y = x$
d. $y = \frac{5}{3}x + 8$

- $y = x - 4$
- $y = \frac{5}{3}x + 4$
- $3x - y = 2$
- $x + 5y = 4$

29. Unan con flechas las rectas perpendiculares.

a. $y = \frac{3}{2}x + 2$
b. $y = 5x + 4$
c. $y = x + 4$
d. $x + 2y = 6$

- $y = -x$
- $x + 5y = 5$
- $12 = 3y + 2x$
- $y = 2x + 3$

30. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas usando ejemplos.

a. Si una recta no es perpendicular a $y = -3x + 5$, entonces es paralela. ☐

b. Dos rectas perpendiculares pueden tener la misma ordenada al origen. ☐

c. Para encontrar una recta paralela a $y = \frac{3}{5}x + 3$ basta con mantener la misma pendiente. ☐

d. Dos rectas que tienen la misma ordenada al origen son paralelas. ☐

e. Dos rectas que tienen pendientes opuestas e inversas son perpendiculares. ☐

31. Escriban la ecuación de la recta que cumpla con lo pedido en cada caso.

a. Una recta A paralela a $y = -\frac{2}{3}x + 2$, cuya ordenada al origen sea 3.

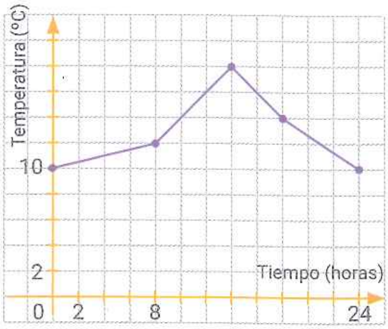
b. Una recta B, perpendicular a $y = x + 3$, cuya ordenada al origen sea −5.

c. Una recta C, paralela a $y = -3x - \frac{1}{5}$, que pase por el punto c = (2;4).

d. Una recta D que sea perpendicular a $x + 5y = 2$ y que pase por el punto d = (0;4).

32. Resuelvan.

El siguiente gráfico muestra la temperatura que se registró durante un día.



a. ¿Cuál fue la temperatura máxima y a qué hora se registró?

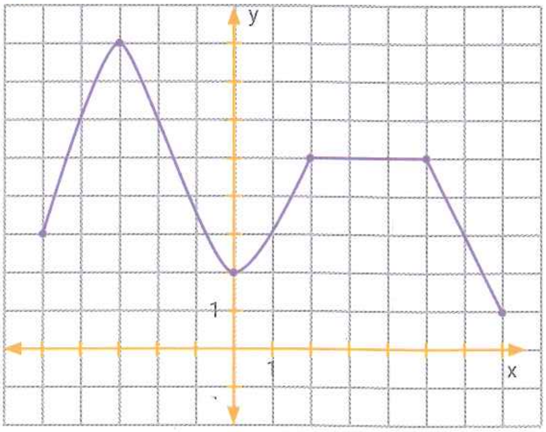
b. ¿Cuál fue la temperatura mínima y a qué hora se registró?

c. ¿En qué momento se mantuvo constante la temperatura?

d. ¿En qué períodos aumentó la temperatura?

e. ¿En qué períodos disminuyó la temperatura?

33. Observen el gráfico y escriban lo pedido.



a. Dominio e imagen.

b. Raíces.

c. Máximo y mínimo.

d. Intervalo de crecimiento.

e. Intervalo de decrecimiento.

f. ¿En algún tramo es constante? Si es así, indiquen en cuál.

34. Grafiquen una función que cumpla con las siguientes características.

a. Dominio: $(-3;5)$; imagen: $(-2;4)$.

b. Raíces: $\{-3; 1; 4\}$.

c. Máximo: $(-1;4)$; mínimo: $(2;-2)$.

d. Intervalo de crecimiento: $(-3;-1)$ U $(2;5)$.

e. Intervalo de decrecimiento: $(-1;2)$.

35. Lean atentamente y resuelvan.

En una fábrica de barbijos los empleados cobran \$800 el día más \$30 por cada unidad producida.

a. ¿Cuáles son las variables? Clasifíquenlas.

b. Escriban la fórmula de la función que relacione las variables.

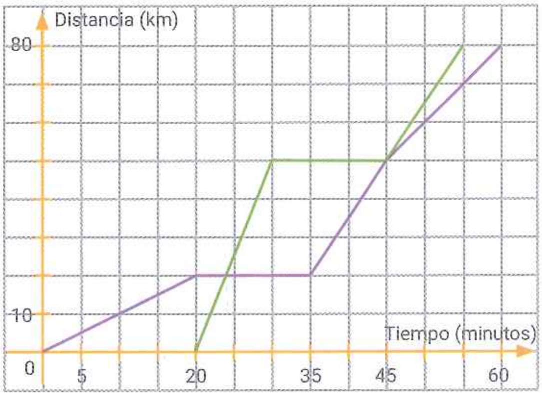
c. ¿Cuánto cobrará una persona si en un día produce 25 barbijos?

d. ¿Cuántos barbijos debe producir para ganar \$2 000 en un día?

e. Representen gráficamente la función.

36. Observen el gráfico y respondan.

El siguiente gráfico muestra el espacio recorrido por dos automóviles.



Referencias: — Automóvil A; — Automóvil B

a. ¿Qué automóvil comenzó más tarde el recorrido? ¿Cuánto tiempo después que el otro auto?

b. ¿Cuál llegó antes?

c. ¿Cuánto tardó cada vehículo en realizar el recorrido?

d. ¿Cuánto tiempo estuvo parado cada coche? ¿En qué kilómetro se detuvo cada uno?

37. **Marquen con una X los puntos que pertenecen a la recta $y = -2x + 3$.**

a. $(-3;2)$ ☐

b. $(3;-3)$ ☐

c. $(5;-7)$ ☐

d. $\left(\frac{1}{2};-2\right)$ ☐

38. **Tengan en cuenta la ecuación de cada recta y resuelvan.**

a. $y = 3x + 5$

b. $x + 3y = 5$

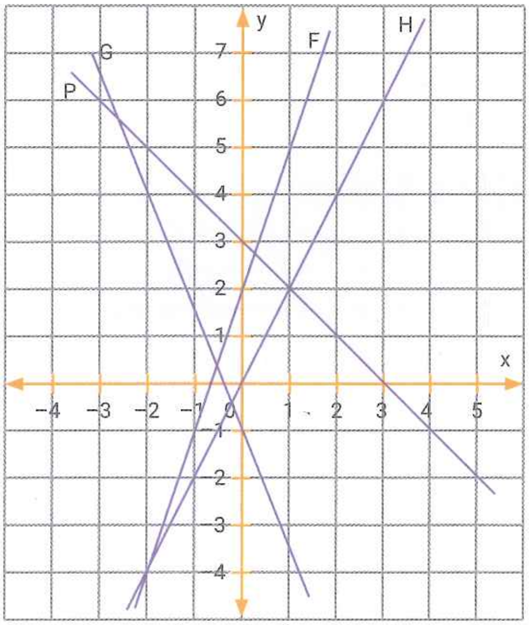
c. $x + y = 2$

d. $2x - 3y = -1$

e. $3x = 2y$

- Indiquen la pendiente y la ordenada al origen.
- Indiquen si la función es creciente, decreciente o es constante, según corresponda.
- Representen gráficamente.

39. **Observen las rectas y resuelvan.**



a. Escriban la ecuación de cada recta.

b. Calculen sus raíces analíticamente.

40. **Escriban la ecuación de la recta que cumpla lo pedido en cada caso y represéntenla.**

a. Su pendiente es 2 y su ordenada al origen es -3.

b. Pasa por los puntos $(-2;5)$ y $(1;-1)$.

c. Su pendiente es -3 y pasa por el origen de coordenadas.

d. Pasa por el punto $(2;3)$ y su raíz es $x = 1$.

41. **Resuelvan.**

a. Indiquen la ecuación de la recta A que pasa por el punto $(-2;2)$ y es paralela a la recta B que pasa por los puntos $(4;-3)$ y $(5;2)$.

b. Indiquen la ecuación de la recta C que pasa por el punto $(5;-1)$ y es perpendicular a la recta D que pasa por los puntos $(14;6)$ y $(-21;-4)$.

c. Grafiquen las rectas A, B, C y D.

42. **Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen las respuestas.**

La recta R pasa por los puntos $(-3;5)$ y $(-2;-3)$.

a. La ordenada al origen de R es -29. ☐

b. La pendiente de R es -8. ☐

c. La recta R es paralela a $y = \frac{1}{8}x + 3$. ☐

d. La recta R es perpendicular a $8y = x + 1$. ☐

e. La recta R pasa por el punto $(0;-19)$. ☐

f. La raíz de la recta R es -19. ☐

19. Sistemas de ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos ecuaciones de primer grado, con dos incógnitas cada una, determinan un **sistema de ecuaciones**.
La solución del sistema está formada por los valores de **x** e **y** que verifican las dos ecuaciones simultáneamente.
Existen diferentes métodos analíticos para resolver un sistema de dos ecuaciones.

- Para resolver el sistema por el **método de igualación**, se pueden seguir estos pasos.

$$\begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

1. Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones (en este caso: y).	$y = \frac{5}{2} + x$ $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$
2. Se igualan las ecuaciones y se resuelve la ecuación.	$\frac{5}{2} + x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ $x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}x = -2$ $x = -\frac{4}{3}$
3. Se reemplaza el valor obtenido de x en cualquiera de las dos expresiones del punto 1.	$y = \frac{5}{2} + \left(-\frac{4}{3}\right)$ $y = \frac{7}{6}$
4. Se escribe el conjunto solución.	$S = \left\{\left(-\frac{4}{3}; \frac{7}{6}\right)\right\}$

- Para resolver el sistema por el **método de sustitución**, se pueden seguir estos pasos.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ \frac{2}{3}x + y = 3 \end{cases}$$

1. Se despeja una incógnita de una de las dos ecuaciones.	$y = 3 - \frac{2}{3}x$
2. Se reemplaza la expresión en la otra función y se resuelve.	$2x + 2\left(3 - \frac{2}{3}x\right) = 1$ $2x + 6 - \frac{4}{3}x = 1$ $2x - \frac{4}{3}x = 1 - 6$ $\frac{2}{3}x = -5$ $x = -\frac{15}{2}$
3. Se reemplaza el resultado obtenido en la expresión que fue despejada la incógnita.	$y = 3 - \frac{2}{3}\left(-\frac{15}{2}\right)$ $y = 8$
4. Se escribe el conjunto solución.	$S = \left\{\left(-\frac{15}{2}; 8\right)\right\}$

19. Sistemas de ecuaciones

- Para resolver el sistema por el **método de sumas y restas**, se pueden seguir estos pasos.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$

1. Se multiplica por −3 ambos miembros de la segunda ecuación para que, cuando se sume con la primera, se anule la variable x.	$(-3)\,(x - 3y) = -5\,.\,(-3)$ $-3x + 9y = 15$
2. Se considera un sistema equivalente y se suma miembro a miembro las ecuaciones.	$3x + 2y = 7$ $+\ -3x + 9y = 15$ $0x + 11y = 22$ $y = 22 : 11$ $y = 2$
3. Para hallar el valor de x se reemplaza y = 2 en cualquiera de las dos ecuaciones. Por ejemplo, en la segunda ecuación.	$x - 3\,.\,2 = -5$ $x - 6 = -5$ $x = 1$
4. Se escribe el conjunto solución.	$S = \{(1;2)\}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/sec* para conocer más acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones y en puerto.pub/calse donde encontrarán una calculadora de sistemas de ecuaciones que les servirá para verificar las soluciones de las actividades.**

Enlaces acortados de * https://www.geogebra.org/m/xactM6pB y
** https://www.matesfacil.com/calculadoras/calculadora-online-resolver-sistemas-ecuaciones-2x2-soluciones.html

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué significa que un sistema de ecuaciones es equivalente a otro?
   b. ¿Cuál de las variables se debe despejar para aplicar el método de sustitución?
   c. ¿Qué método les parece más conveniente para aplicar en distintos sistemas de ecuaciones?

19. Sistemas de ecuaciones

43. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de igualación. Verifiquen los resultados.

a. $\begin{cases} \frac{3}{2}x + 4y = 1 \\ x + \frac{5}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7 = y + 2x \\ x = 9y - 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ 3y - 2x = -3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -2x + 4y = 12 \\ -6x + 12y = 36 \end{cases}$

44. Resuelvan los siguientes sistemas aplicando el método de sustitución. Verifiquen los resultados.

a. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y = -\frac{5}{3} \\ -11x - 7 = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 14y = 44 \\ 3x - \frac{1}{3}y = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ 6x - 21y = 9 \end{cases}$

45. Resuelvan los siguientes sistemas aplicando el método de sumas y restas. Verifiquen los resultados.

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ \frac{3}{2}x - y = -\frac{1}{5} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{2}x = 4y + 3 \\ \frac{2}{3}(x - 1) = y \end{cases}$

d. $\begin{cases} (3x - 2y) : 4 = 2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{5}{3} \end{cases}$

19. Sistemas de ecuaciones

46. Calculen el valor de "a" para que los sistemas tengan la solución indicada.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax - 3y = 4 \end{cases}$ Solución = {(1;1)}

b. $\begin{cases} \frac{3}{2}x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = ay \end{cases}$ Tiene infinitas soluciones.

c. $\begin{cases} -3x + 2y = 10 \\ ax - \frac{7}{5}y = -7 \end{cases}$ Solución = {(0;5)}

d. $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ x - ay = 5 \end{cases}$ No tiene solución.

e. $\begin{cases} -3x + 5y = 21 \\ 2x + ay = -10 \end{cases}$ Solución = {(−2;3)}

f. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 2 \\ ax + 9y = 7 \end{cases}$ Solución = $\left\{\left(2;\frac{1}{3}\right)\right\}$

47. Resuelvan las siguientes situaciones planteando un sistema de ecuaciones.

a. La diferencia entre un número y el doble del otro es 15. Si el segundo es la quinta parte del primero, ¿cuáles son esos números?

b. El perímetro de un paralelogramo es de 60 cm y uno de sus lados es $\frac{3}{2}$ del otro. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

c. Las edades de Guadalupe y de Bruno suman 20 años. Dentro de 5 años, Bruno tendrá la mitad de años de los que tenga Guada. ¿Qué edad tiene hoy cada uno?

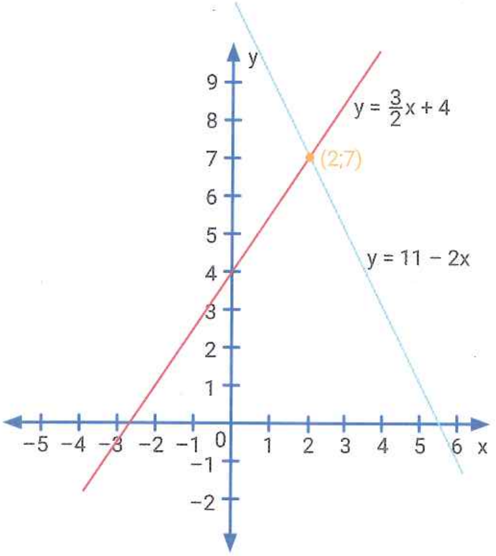
d. El lunes Cayetano compró en la librería tres lapiceras y dos marcadores y pagó un total de $399. El viernes compró otros dos marcadores (que ya habían aumentado $15 cada uno) y una lapicera (que seguía al mismo precio) y pagó un total de $323. ¿Cuál era el precio de las lapiceras y de los marcadores el lunes?

20. Resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Cada ecuación de un sistema de ecuaciones lineales representa una recta.
Para encontrar la solución gráficamente se debe representar cada una de ellas.

$$\begin{cases} y - \frac{3}{2}x = 4 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \quad \begin{matrix} \longrightarrow & y = \frac{3}{2}x + 4 \\ \longrightarrow & y = 11 - 2x \end{matrix}$$



Las rectas se intersecan en $x = 2$, $y = 7$.
El conjunto solución del sistema se escribe $S = \{(2;7)\}$.

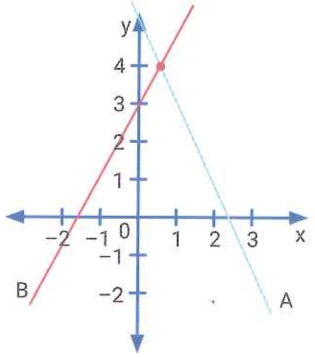
Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/gse* para practicar la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.

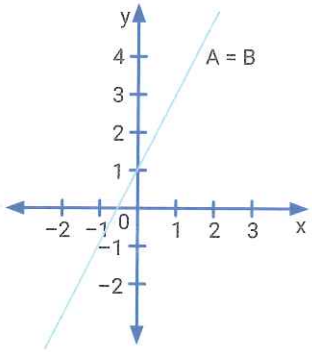
* Enlace acortado de https://www.mathway.com/es/Graph

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

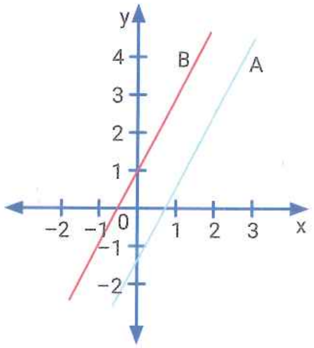
Un sistema de ecuaciones es **compatible determinado** (S.C.D.) cuando tiene una sola solución.



Un sistema de ecuaciones es **compatible indeterminado** (S.C.I.) cuando tiene infinitas soluciones.



Un sistema de ecuaciones es **incompatible** (S.I.) cuando no tiene solución.



TEST DE COMPRENSIÓN

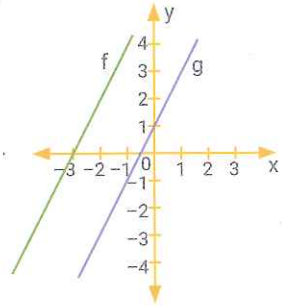
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si dos rectas distintas son paralelas al eje de ordenadas, ¿qué tipo de sistema forman?
   b. Si una recta es creciente y otra es decreciente, ¿qué tipo de sistema forman?
   c. Inventen tres sistemas de ecuaciones: uno que sea compatible determinado, otro que sea compatible indeterminado y otro que sea incompatible.

ACTIVIDADES

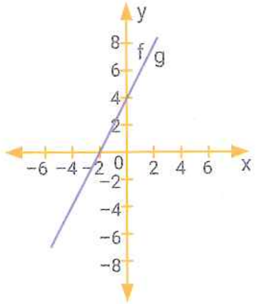
20. Resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones

48. Clasifiquen la solución de los siguientes sistemas.

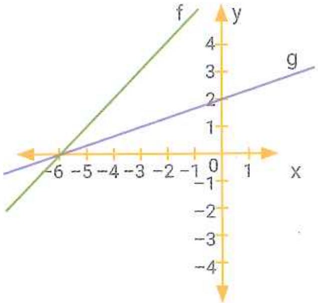
a.



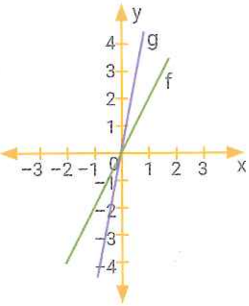
c.



b.

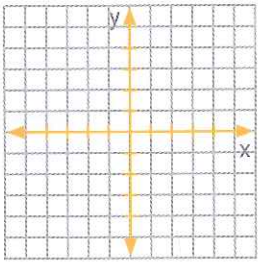


d.

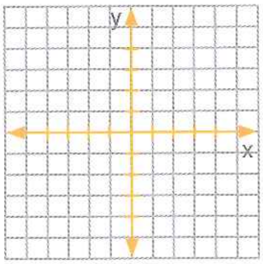


49. Resuelvan gráfica y analíticamente cada sistema de ecuaciones. Luego, clasifíquenlos según su conjunto solución.

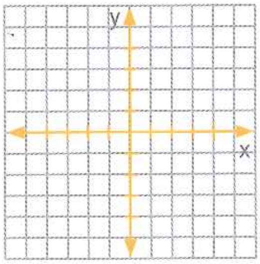
a. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$



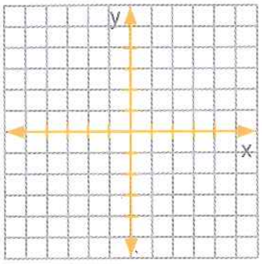
c. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$



b. $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$



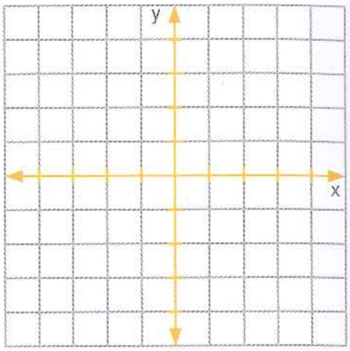
d. $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 1 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$



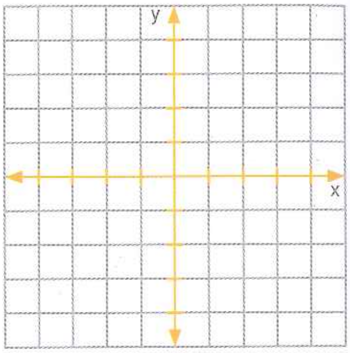
20. Resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones

50. Escriban una ecuación para que el sistema cumpla con la condición pedida en cada caso. Resuélvanlo gráfica y analíticamente.

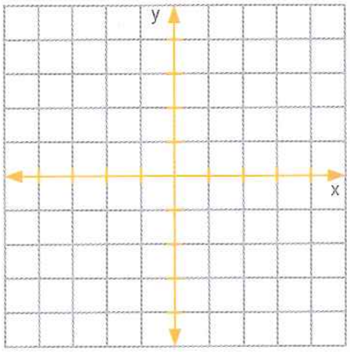
a. $\begin{cases} 3x + 5 = y \\ \square \end{cases}$ S.C.D.



b. $\begin{cases} 3x + 5 = y \\ \square \end{cases}$ S.C.I.



c. $\begin{cases} 3x + 5 = y \\ \square \end{cases}$ S.I.



51. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

Dado el sistema: $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - 2 \\ ax - y = 3 \end{cases}$

a. Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado. ☐

b. Si $a = -\frac{2}{3}$, el sistema es incompatible. ☐

c. Si $a = -3$, el sistema tiene infinitas soluciones. ☐

d. Si $a = 0$, el sistema es compatible indeterminado. ☐

20. Resolución gráfica de los sistemas de ecuaciones

52. Resuelvan.

a. Calculen un valor de "a" para que el sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} 3(x + 2) + 2y = 4 \\ ax + 5y = 3 \end{cases}$$

b. Calculen un valor de "a" y de "b" para que el sistema sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ ax - 3y = b \end{cases}$$

c. Calculen un valor de "a" y de "b" para que el sistema sea compatible determinado.

$$\begin{cases} 4x + 3 = y \\ ax + y = b \end{cases}$$

53. Lean atentamente y respondan.

Cayetano dice que para que el siguiente sistema de ecuaciones sea incompatible, el valor de "a" debe ser cero. ¿Es correcto? Expliquen la respuesta.

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ y = 3x + a \end{cases}$$

21. Función cuadrática

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **función** es **cuadrática** cuando su fórmula es:

$y = ax^2 + bx + c$ **a**, **b** y **c** son números reales y **a** ≠ **0**.

- La curva que corresponde a una función cuadrática se denomina parábola.
- El punto mínimo o máximo de la parábola se llama vértice.
- Las raíces son los puntos donde la parábola interseca al eje x.
- Cuando **a > 0** la función es **cóncava hacia arriba**, y cuando **a < 0** es **cóncava hacia abajo**.

Los siguientes son ejemplos de análisis de funciones cuadráticas.

$y = x^2 + 2x - 3$

La función es cuadrática.

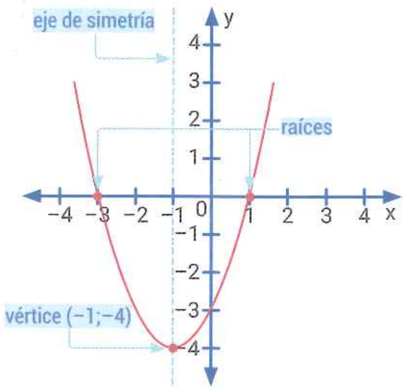
El vértice es un mínimo: $v = (-1;-4)$.

Las raíces son $x = -3$ *y* $x = 1$.

El eje de simetría es $x = -1$.

La parábola es cóncava hacia arriba $(a > 0)$.

La parábola crece en $(-1;+\infty)$ *y decrece en* $(-\infty;-1)$.



$y = -x^2 + 2x + 8$

La función es cuadrática.

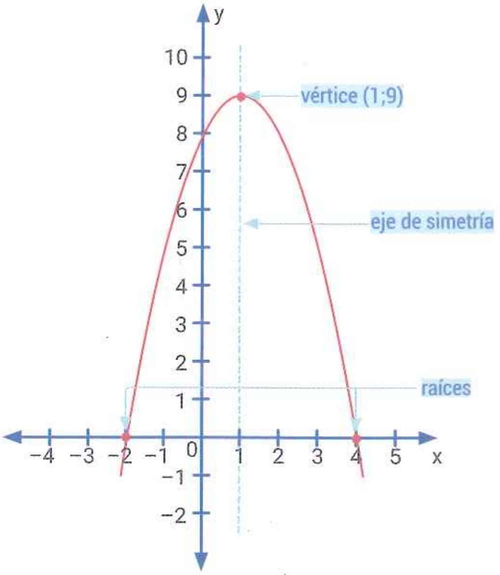
El vértice es un máximo: $v = (1;9)$.

Las raíces son $x = -2$ *y* $x = 4$.

El eje de simetría es $x = 1$.

La parábola es cóncava hacia abajo $(a < 0)$.

La parábola crece en $(-\infty;1)$ *y decrece en* $(1;+\infty)$.



21. Función cuadrática

Para hallar las raíces (x_1 y x_2) de la función cuadrática se utiliza la siguiente fórmula:

$$x_1;\, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para hallar el vértice (x_v ; y_v) de una función cuadrática se calcula:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f(x_v)$$

El siguiente es un ejemplo de cómo se calculan las raíces y el vértice en una función cuadrática.

$y = x^2 - 8x + 12$ $\qquad$ $a = 1;\ b = -8;\ c = 12$

Para calcular las raíces:

$$x_1;\, x_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 . 1 . 12}}{2 . 1}$$

$$x_1;\, x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2}$$

$$x_1;\, x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1;\, x_2 = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{2} \qquad x_2 = \frac{8-4}{2}$$

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2$$

Las raíces son x = 2 y x = 6.

Para calcular el vértice:

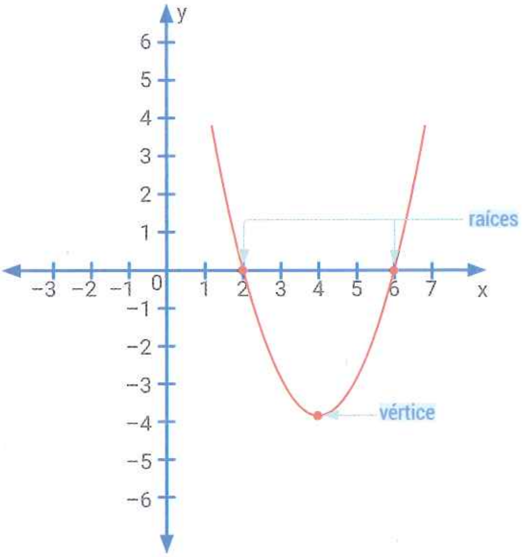
$$x_v = \frac{-(-8)}{2 . 1} \longrightarrow x_v = 4$$

$$y_v = f(x_v) = 4^2 - 8 . 4 + 12$$

$$y_v = 16 - 32 + 12 \longrightarrow y_v = -4$$

El vértice es (4;–4).

Una vez encontrados las raíces y el vértice, se puede hacer un gráfico aproximado.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/gfc* para mirar un video y conocer más acerca de la función cuadrática.

* Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=lRWdBV5L5Pc

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La función f(x) = x^2 ¿es cuadrática?
   b. En una función cuadrática, ¿qué valor hay que mirar para saber si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo?
   c. Observen el último ejemplo e indiquen cuál es el eje de simetría. ¿Es cierto que se puede determinar conociendo el vértice?

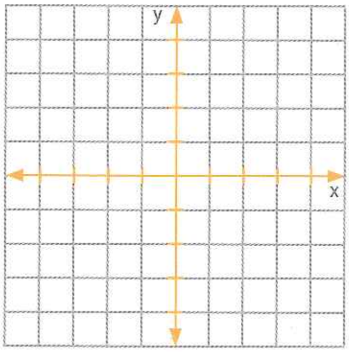
ACTIVIDADES

21. Función cuadrática

54. Completen la tabla y grafiquen la función.

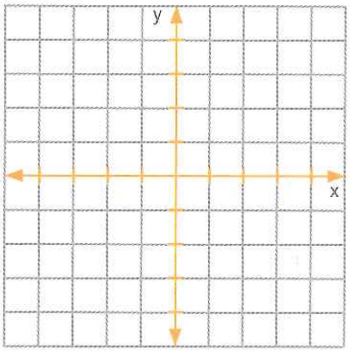
a. $f(x) = x^2 - 4$

x	−2	−1	0	1	2
y					



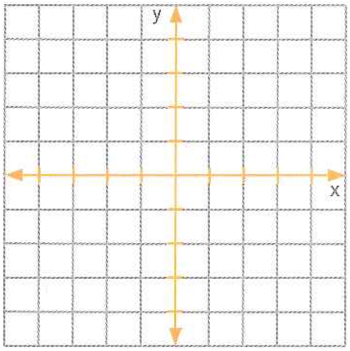
b. $f(x) = 2x^2 + 2$

x	−2	−1	0	1	2
y					



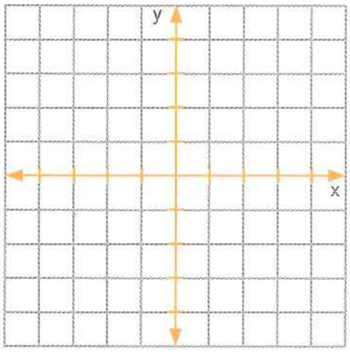
c. $f(x) = -x^2 - 1$

x	−2	−1	0	1	2
y					



d. $f(x) = x^2 + 2x$

x	−2	−1	0	1	2
y					



55. Tengan en cuenta las funciones de la actividad anterior y completen la tabla.

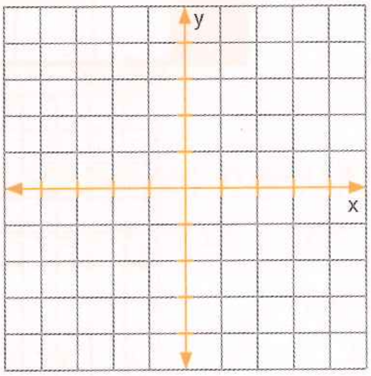
Función	Vértice	Eje de simetría	Raíces	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento
$f(x) = x^2 - 4$					
$f(x) = 2x^2 + 2$					
$f(x) = -x^2 - 1$					
$f(x) = x^2 + 2x$					

21. Función cuadrática

56. Reúnanse con sus compañeros y resuelvan.

a. Representen las siguientes funciones en un mismo par de ejes cartesianos. Usen distintos colores.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = -x^2$
- $h(x) = x^2 + 1$
- $p(x) = x^2 - 1$
- $q(x) = x^2 + 3$
- $r(x) = x^2 - 2$

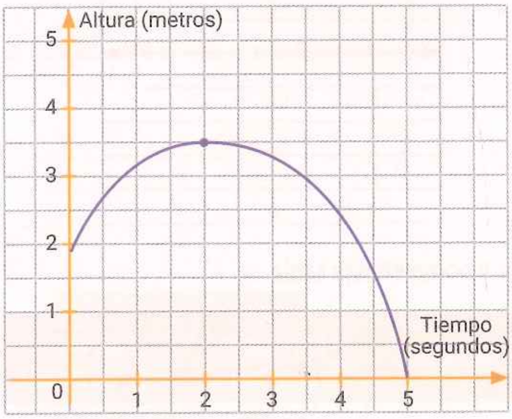


b. Observen las funciones representadas anteriormente, que son de la forma $y = ax^2 + c$, y respondan.

- ¿Cómo es la gráfica cuando $a > 0$?
- ¿Cómo es la gráfica cuando $c > 0$?
- ¿Cómo es la gráfica cuando $a < 0$?
- ¿Cómo es la gráfica cuando $c < 0$?

57. Lean atentamente, observen el gráfico y respondan.

Juan lanzó una piedra hacia arriba. La trayectoria del objeto está representada en el siguiente gráfico.



a. ¿Desde qué altura fue lanzada?

b. ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó la piedra?

c. ¿Qué representa el punto (5;0)?

58. Determinen las raíces y los vértices de cada función cuadrática usando las fórmulas correspondientes.

a. $y = x^2 + 8x + 15$

b. $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 12$

Integración final

59. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método más conveniente. Luego, grafiquen cada sistema para verificar la solución.

a. $\begin{cases} \frac{5}{2}x - y = 8 \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + y = 15 \\ \frac{3}{5}y = \frac{1}{5} - 3x \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{1}{4}x + 3y = 2 \\ x = 8 - 12y \end{cases}$

60. Calculen el valor de "a" para que los siguientes sistemas tengan la solución indicada. Luego, grafiquen el sistema obtenido en cada caso.

a. $\begin{cases} 14x + 3y = -21 \\ 3ax + \frac{1}{7}y = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Solución: (−3;7).

b. $\begin{cases} ax - 3y = -11 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$

Solución: (2;1).

c. $\begin{cases} 5x = 3 - y \\ ax + 6 = 2y \end{cases}$

Infinitas soluciones.

d. $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ ax + 3y = 1 \end{cases}$

No tiene solución.

e. $\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$

Solución: (0;1).

61. Resuelvan las siguientes situaciones problemáticas planteando el sistema de ecuaciones correspondiente.

a. Las edades de Bautista y Cayetano suman 12. Si Bautista es 2 años más grande que Cayetano, ¿cuántos años tiene cada uno?

b. Marcelo y José tienen entre los dos $7 300. La mitad del dinero de Marcelo más las dos quintas partes del de José suman $3 420. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

c. Amelia tiene un terreno rectangular de 140 m de perímetro. El fondo del terreno es el 40% del frente. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

62. Inventen una situación problemática que se resuelva con el siguiente sistema de ecuaciones. Luego, resuélvanla gráfica y analíticamente.

$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 3y = 31 \end{cases}$

63. Escriban una ecuación para que el sistema cumpla con la condición pedida en cada caso. Resuélvanlo gráfica y analíticamente.

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \boxed{} \end{cases}$

Sistema compatible determinado.

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \boxed{} \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado.

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \boxed{} \end{cases}$

Sistema incompatible.

64. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.**

a. El mayor exponente de "x" en una función cuadrática es 1. ☐

b. En la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, el valor de "a" siempre es 1. ☐

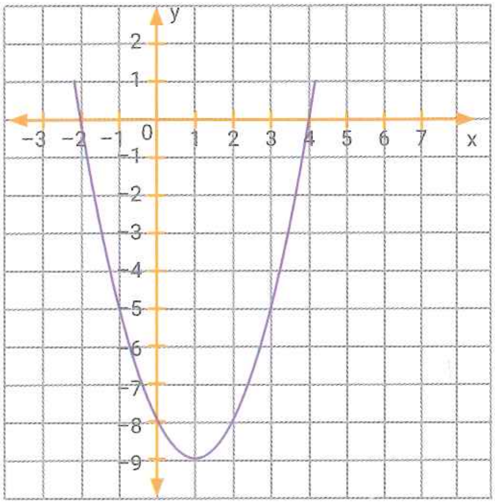
c. Existen funciones cuadráticas que no tienen raíces. ☐

d. El eje de simetría siempre pasa por el vértice de la parábola. ☐

e. El vértice de la función cuadrática nunca coincide con las raíces. ☐

f. En la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, el valor de "c" no puede ser 0. ☐

65. **Observen el gráfico y respondan.**



a. Escriban la ecuación del eje de simetría.

b. Indiquen las coordenadas del vértice.

c. ¿Cuáles son las raíces de la función?

d. Escriban el intervalo de crecimiento y de decrecimiento.

66. **Realicen el gráfico de una parábola que cumpla con las siguientes condiciones.**

- El vértice de la parábola es (−2;−1).
- Las raíces son $x = -3$; $x = -1$.
- La ordenada al origen es $y = 3$.

67. **Grafiquen las siguientes funciones. Luego, completen la tabla.**

a. $y = x^2 + 2x - 3$

b. $y = x^2 - 2x + 4$

c. $y = \frac{1}{2}x^2$

d. $y = x^2 - 6x + 5$

Función	Vértice	Eje de simetría	Raíces
a.			
b.			
c.			
d.			

68. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se lanza hacia arriba una flecha desde 2 m de altura, siguiendo una trayectoria de una parábola cuya función tiene la siguiente expresión:

$$h(t) = -t^2 + t + 2$$

t representa el tiempo en segundos.

a. Grafiquen la función.

b. ¿Cuánto tarda la flecha en llegar al piso?

c. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la flecha?

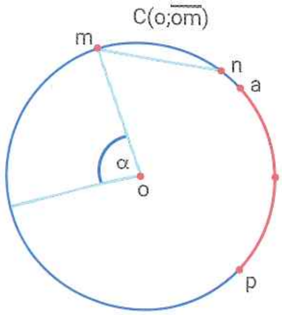
d. ¿Cuáles son las variables de la función?

4 Figuras planas

22. Circunferencia y círculo

▶ SABERES DINÁMICOS

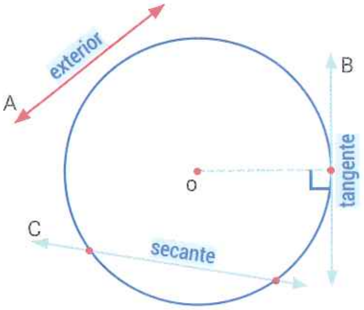
Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto llamado **centro**.



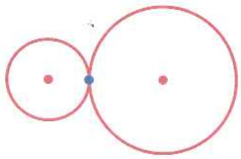
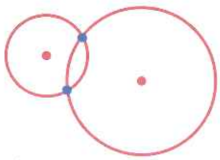
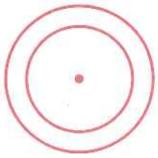
- $C(o;\overline{om})$ significa circunferencia de centro o y radio $\overline{om}$.
- Se denomina **cuerda** al segmento que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia. Por ejemplo, $\overline{mn}$ es una cuerda.
- Se denomina **arco** a la parte de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma. Por ejemplo, $\widehat{arp}$ es un arco de la circunferencia.
- Se denomina **ángulo central** al que tiene como vértice el centro de la circunferencia. Por ejemplo, $\hat{\alpha}$ es un ángulo central.

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

- Una recta es **exterior** a una circunferencia cuando no tienen puntos en común.
- Una recta es **tangente** a una circunferencia cuando tienen un punto en común.
- Una recta es **secante** a una circunferencia cuando tienen dos puntos en común.



Posiciones relativas de dos circunferencias

Dos circunferencias son **tangentes** cuando tienen un único punto en común.	Dos circunferencias son **secantes** cuando tienen dos puntos en común.	Dos circunferencias son **concéntricas** cuando tienen el centro en común.
		

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿En qué caso dos circunferencias pueden tener más de dos puntos en común?
   b. ¿Cuál es la cuerda mayor de cualquier circunferencia?
   c. En una circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo central cuyos lados pasan por los extremos de la cuerda mayor?

ACTIVIDADES

22. Circunferencia y círculo

1. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. Si dos circunferencias son secantes, entonces el radio de una de ellas debe ser menor al radio de la otra. ☐

b. Dos circunferencias $C_1(o;\overline{on})$ y $C_2(p;\overline{pm})$ son tangentes, si $\overline{op}$ es menor que la suma de los radios de ambas circunferencias. ☐

c. Dos circunferencias $C_1(o;\overline{on})$ y $C_2(p;\overline{pm})$ son secantes si $\overline{op}$ es menor que la suma de los radios de ambas circunferencias. ☐

d. Una recta tangente a una circunferencia forma un ángulo recto con el radio con el que comparte un punto. ☐

e. Todo ángulo central de una circunferencia siempre es menor a 180°. ☐

2. Construyan teniendo en cuenta los datos.

a. Tracen $C(o;\overline{op})$, donde $\overline{op}$ = 2,5 cm.

b. Dibujen una cuerda $\overline{ab}$.

c. Dibujen una recta G tangente a la circunferencia en el punto a.

d. Dibujen un ángulo central $\widehat{boc}$ = 90°.

3. Escriban la letra correspondiente a la condición que cumple cada figura.

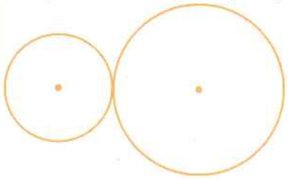
La distancia entre los centros de las circunferencias es:

A - Mayor que la suma de los radios.

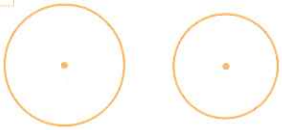
B - Igual que la suma de los radios.

C - Menor que la suma y mayor que la resta de los radios.

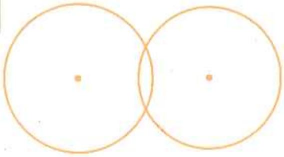
a. ☐



b. ☐



c. ☐



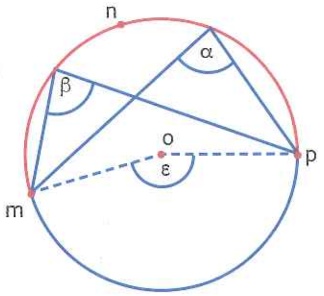
23. Ángulos inscriptos y semiinscriptos

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **ángulo inscripto** en un arco de circunferencia al que tiene por vértice un punto del arco y sus lados pasan por los extremos del mismo.

El **ángulo central correspondiente** a uno inscripto es aquel que abarca el mismo arco que el ángulo inscripto.

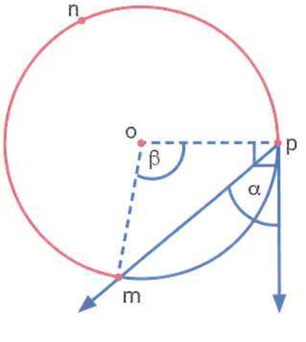
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ están inscriptos en el $\overset{\frown}{mnp}$.
$\hat{\varepsilon}$ es el ángulo central correspondiente a $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.



Todos los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen la misma medida.

Se llama **ángulo semiinscripto** en un arco de circunferencia al que tiene el vértice en un extremo del arco, uno de sus lados pasa por el otro extremo (del arco) y el otro es tangente a la circunferencia en el semiplano que no contiene al arco.

$\hat{\alpha}$ está semiinscripto en el $\overset{\frown}{mnp}$.
$\hat{\beta}$ es el ángulo central correspondiente a $\hat{\alpha}$.



Los ángulos semiinscriptos tienen la misma medida que los ángulos inscriptos en el mismo arco de circunferencia.

La medida de todo ángulo inscripto o semiinscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

TEST DE COMPRENSIÓN

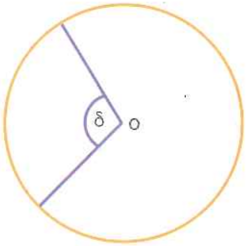
1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿Cuántos ángulos semiinscriptos puede tener un arco de circunferencia?
   b. Si un ángulo inscripto mide 68°, ¿cuánto mide el ángulo central correspondiente?
   c. Si un ángulo inscripto en un arco de circunferencia mide 90°, ¿cuál es la cuerda que determinan los extremos de ese arco?

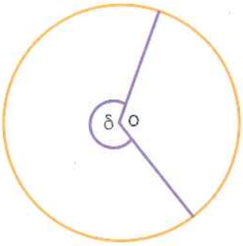
ACTIVIDADES

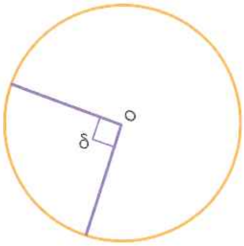
23. Ángulos inscriptos y semiinscriptos

4. Lean atentamente y resuelvan.

a. Para cada ángulo central δ, construyan $\hat{\alpha}$ inscripto y $\hat{\beta}$ semiinscripto, correspondientes al mismo arco.







b. Comparen sus construcciones con las de sus compañeros. ¿Todos lo hicieron igual? ¿Por qué?

5. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen sus respuestas.

a. El ángulo central correspondiente a un ángulo inscripto de 90° mide 180°. ☐

b. Si un ángulo semiinscripto mide 50° 23', entonces el ángulo central correspondiente mide 100° 23'. ☐

c. Para cada ángulo central existen solo dos ángulos inscriptos. ☐

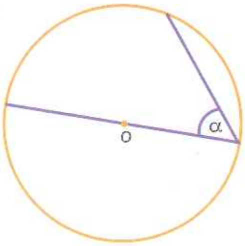
d. Para cada ángulo central existen solo dos ángulos semiinscriptos. ☐

e. Un ángulo inscripto correspondiente al ángulo central de 180° mide 90°. ☐

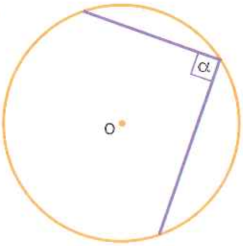
f. Para cada ángulo inscripto en una circunferencia existen infinitos ángulos centrales. ☐

6. Construyan el ángulo central β correspondiente para cada ángulo inscripto o semiinscripto α.

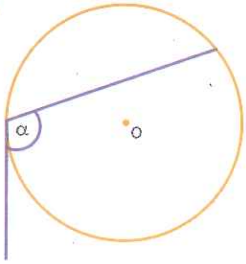
a.



b.



c.



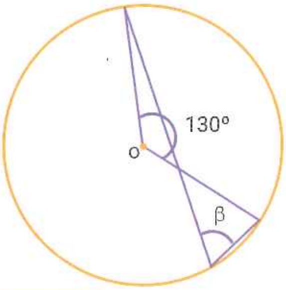
23. Ángulos inscriptos y semiinscriptos

7. Tengan en cuenta las figuras de análisis y escriban en cada caso la medida de los ángulos pedidos. Expliquen sus respuestas.

TIP

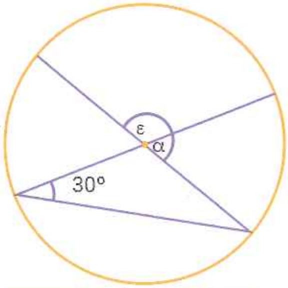
Una figura de análisis es un dibujo en donde se dan datos para resolver un problema, pero que no respeta las medidas.

a.



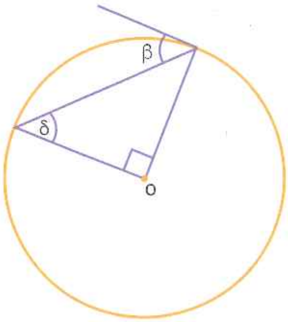
$\hat{\beta}$ =

d.



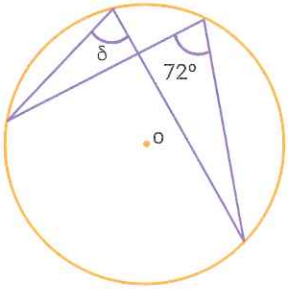
$\hat{\alpha}$ = ; $\hat{\varepsilon}$ =

g.



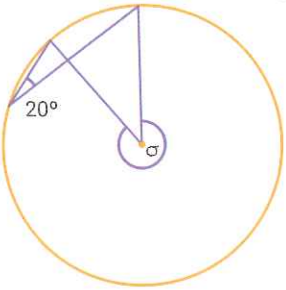
$\hat{\delta}$ = ; $\hat{\beta}$ =

b.



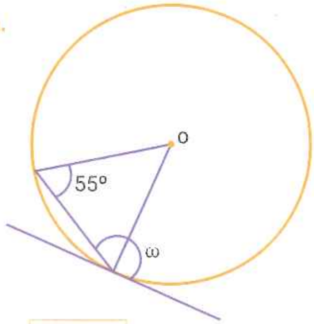
$\hat{\delta}$ =

e.



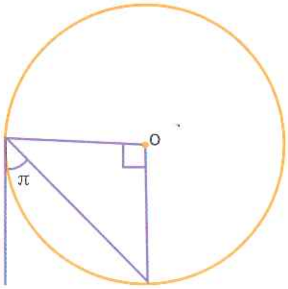
$\hat{\sigma}$ =

h.



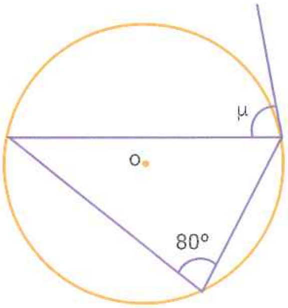
$\hat{\omega}$ =

c.



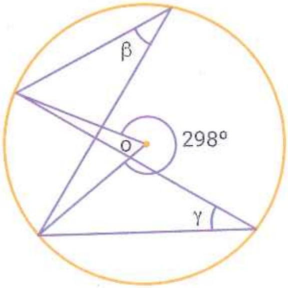
$\hat{\pi}$ =

f.



$\hat{\mu}$ =

i.

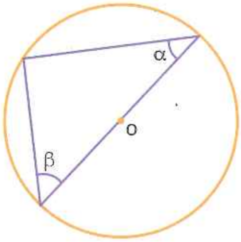


$\hat{\beta}$ = ; $\hat{\gamma}$ =

23. Ángulos inscriptos y semiinscriptos

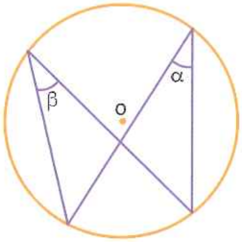
8. Calculen la medida de los ángulos pedidos en cada caso.

a. $\hat{\alpha} = 3x + 8°$; $\hat{\beta} = 4x - 2°$



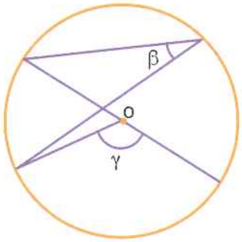
$\hat{\alpha}$ = ; $\hat{\beta}$ =

b. $\hat{\alpha} = x + 15°$; $\hat{\beta} = 2x - 6°$



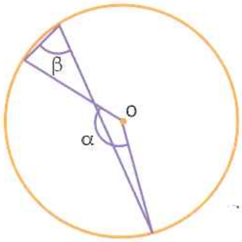
$\hat{\alpha}$ = ; $\hat{\beta}$ =

c. $\hat{\beta} = 3x$; $\hat{\gamma} = 4x + 18°$



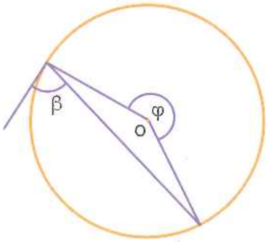
$\hat{\beta}$ = ; $\hat{\gamma}$ =

d. $\hat{\alpha} = 3x - 73°$; $\hat{\beta} = x - 5°$



$\hat{\alpha}$ = ; $\hat{\beta}$ =

e. $\hat{\beta} = 8x$; $\hat{\varphi} = 13x + 99°$



$\hat{\beta}$ = ; $\hat{\varphi}$ =

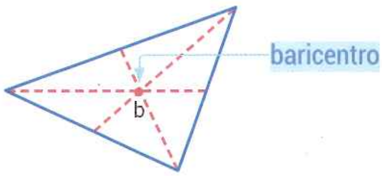
24. Puntos notables de un triángulo

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **puntos notables** de un triángulo son el **baricentro**, el **ortocentro**, el **circuncentro** y el **incentro**.

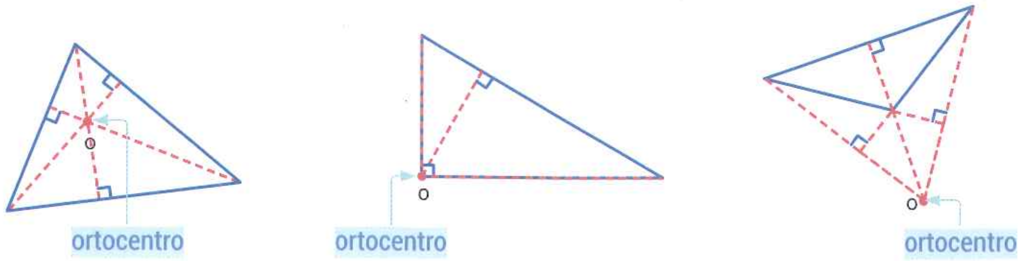
Baricentro

En un triángulo, la **mediana** de un lado es el segmento que tiene por extremos el punto medio y el vértice opuesto a ese lado.
Se llama **baricentro (b)** al punto donde se intersecan las medianas de un triángulo.



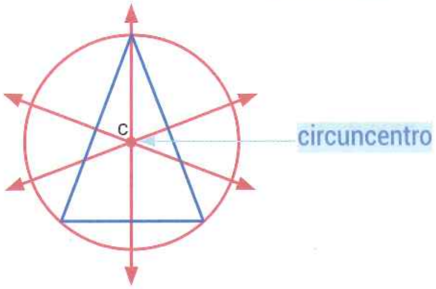
Ortocentro

En un triángulo, la **altura** correspondiente a un lado es el segmento perpendicular a ese lado que tiene por extremos el vértice opuesto y un punto de dicho lado o de su prolongación.
Se llama **ortocentro (o)** al punto donde se intersecan las alturas de un triángulo.



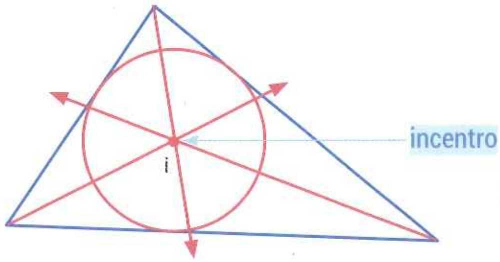
Circuncentro

Se llama **circuncentro (c)** al punto donde se intersecan las mediatrices de un triángulo. Ese punto es el centro de la circunferencia circunscripta en el triángulo.



Incentro

Se llama **incentro (i)** al punto donde se intersecan las bisectrices de un triángulo. Ese punto es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo.



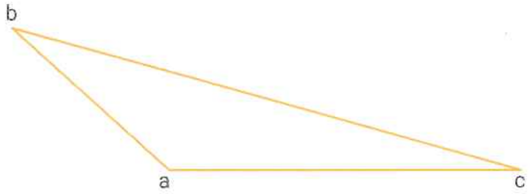
TEST DE COMPRENSIÓN

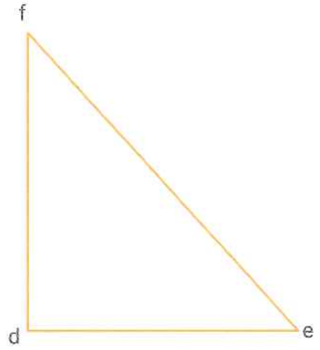
1. Lean atentamente y respondan.
   a. Dados tres puntos no alineados, ¿es posible trazar una circunferencia que pase por ellos? ¿Cuántas se podrán trazar?
   b. ¿Qué punto notable de un triángulo equidista de sus tres lados?
   c. Escriban los pasos que se deberían seguir para inscribir un triángulo en una circunferencia.

ACTIVIDADES

24. Puntos notables de un triángulo

9. Marquen el baricentro en el triángulo abc y el ortocentro en el triángulo def.



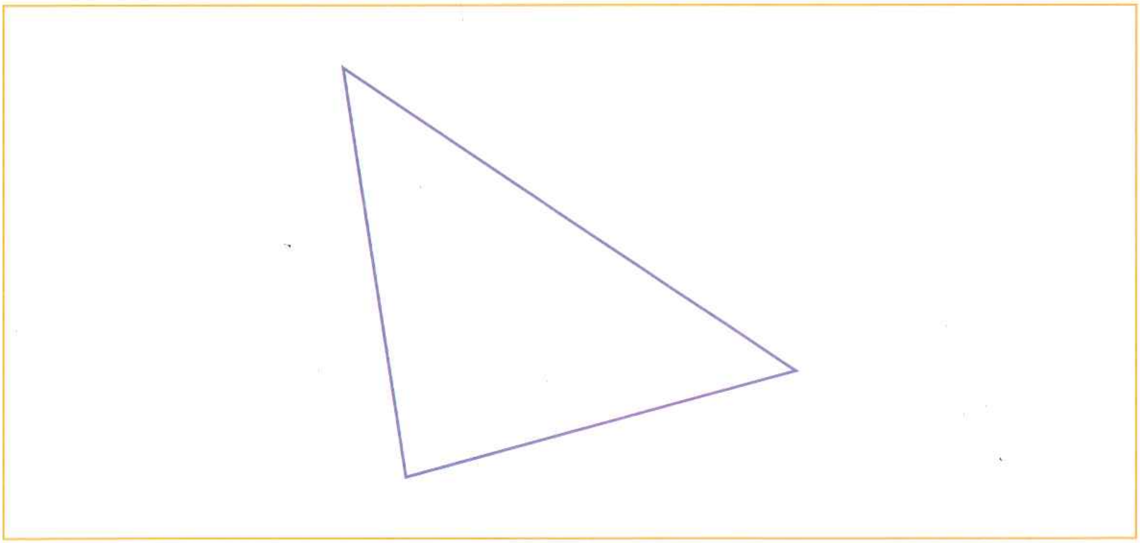


10. Tracen una circunferencia que pase por los puntos a, b y c. Expliquen el procedimiento realizado.

11. Resuelvan.

a. Marquen los cuatro puntos notables en el siguiente triángulo.

b. Tracen la recta que pasa por los cuatro puntos notables (recta de Euler).

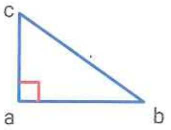


c. Comparen las producciones con sus compañeros.

25. Teorema de Pitágoras

▶ SABERES DINÁMICOS

En un **triángulo rectángulo**, los lados reciben nombres especiales.



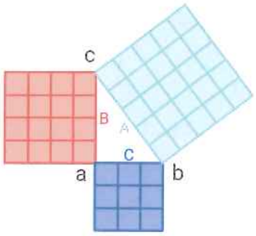
El lado que se opone al ángulo recto se llama **hipotenusa**.
En este caso, $\overline{bc}$ es la hipotenusa.
Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.
En este caso, $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ son los catetos.

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Este teorema puede expresarse en símbolos de la siguiente forma:

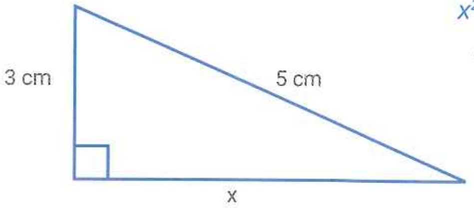
$$\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2$$

• Si en el siguiente esquema se calcula el área de cada cuadrado, se observa:



$3^2 + 4^2 = 5^2$
$9 + 16 = 25$

• Cuando se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la medida que falta aplicando el teorema de Pitágoras.



$x^2 + (3\ cm)^2 = (5\ cm)^2$
$x^2 + 9\ cm^2 = 25\ cm^2$
$x^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$
$x^2 = 16\ cm^2$
$x = \sqrt{16\ cm^2}$
$x = 4\ cm$ *(no se tiene en cuenta el resultado negativo)*

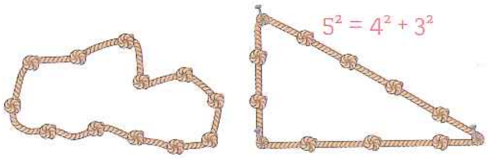
Ternas pitagóricas

Las medidas que corresponden a un triángulo rectángulo forman una terna pitagórica. De esta forma, las medidas 3 cm, 4 cm y 5 cm que corresponden a un triángulo rectángulo son un ejemplo de terna pitagórica. Para encontrar otras ternas se pueden utilizar las siguientes fórmulas. Siendo $x^2 + y^2 = z^2$.

$x = p^2 - q^2$ $\quad$ $y = 2 . p . q$ $\quad$ $z = p^2 + q^2$ $\quad$ con p y q enteros y $p > q$

Áreas dinámicas [Matemática y la Historia]

Los egipcios hacían 12 nudos igualmente espaciados en una cuerda para formar triángulos rectángulos de lados 3, 4 y 5, como se ve en la imagen. El ángulo que forman los lados 3 y 4 es recto.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se llama el lado opuesto al ángulo recto?
   b. ¿Por qué no se puede construir un triángulo rectángulo equilátero?
   c. El teorema de Pitágoras, ¿en qué tipo de triángulos se puede aplicar?
   d. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo cuyos lados miden 5 cm, 6 cm y 3 cm? ¿Por qué?

25. Teorema de Pitágoras

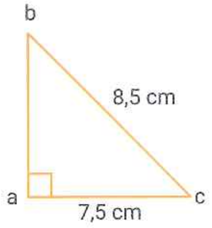
12. Resuelvan.

a. Propongan tres ternas pitagóricas.

b. Compartan las respuestas con sus compañeros. ¿Todos formaron las mismas ternas pitagóricas?

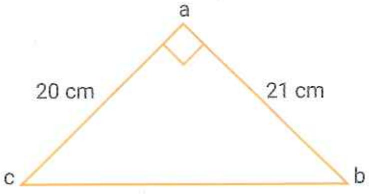
13. Calculen la medida del lado desconocido.

a.



$\overline{ab}$ =

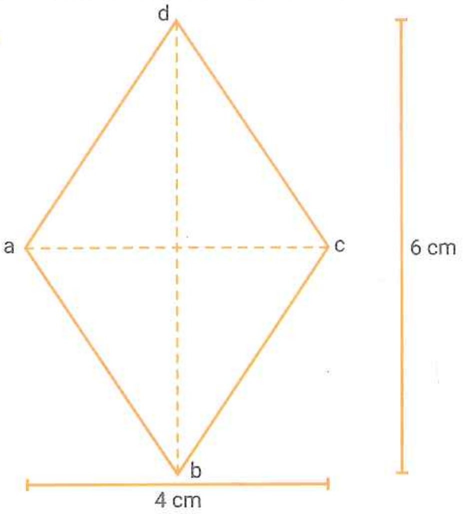
b.



$\overline{cb}$ =

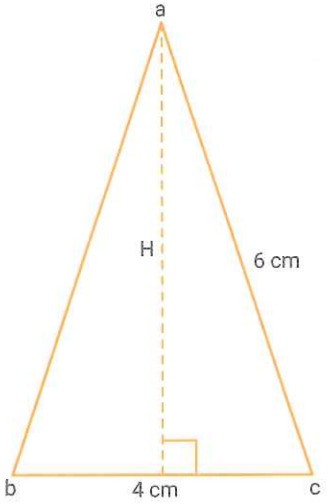
14. Calculen el valor del segmento pedido en cada caso.

a.



$\overline{ad}$ =

b.

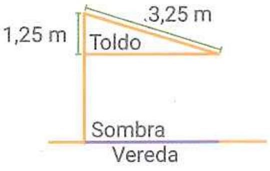


H =

DinámicaMente

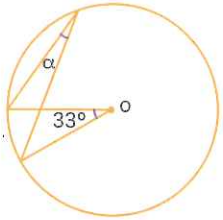
Lean atentamente y resuelvan.

Durante el verano hay ciudades en las que al mediodía los rayos del sol caen perpendicularmente a la Tierra, como muestra la imagen. Calculen el ancho de la sombra que da el toldo sobre la vereda.



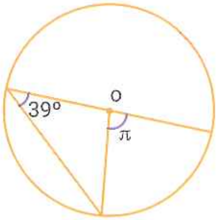
15. Calculen la medida de los ángulos pedidos.

a.



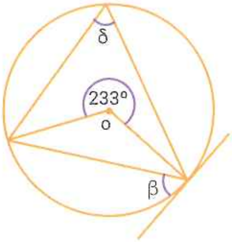
$\hat{\alpha}$ =

b.



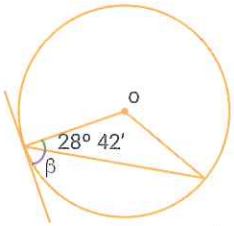
$\hat{\pi}$ =

c.



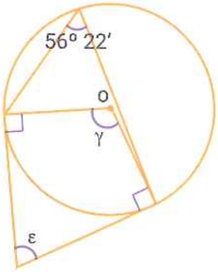
$\hat{\delta}$ = ; $\hat{\beta}$ =

d.



$\hat{\beta}$ =

e.



$\hat{\gamma}$ = ; $\hat{\varepsilon}$ =

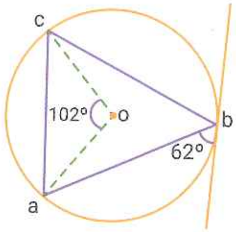
16. Calculen la medida de los ángulos interiores de cada triángulo.

a.

$\hat{a}$ =

$\hat{b}$ =

$\hat{c}$ =

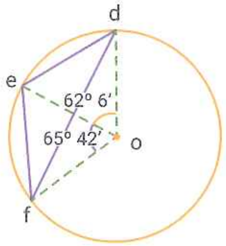


b.

$\hat{d}$ =

$\hat{e}$ =

$\hat{f}$ =

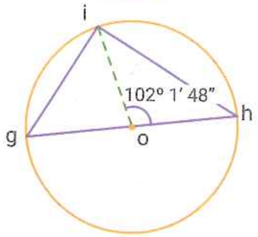


c.

$\hat{g}$ =

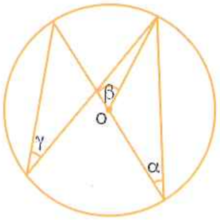
$\hat{h}$ =

$\hat{i}$ =



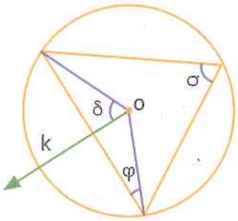
17. Calculen el valor de x y la medida de los ángulos pedidos.

a. $\hat{\alpha} = 2x - 2º$; $\hat{\beta} = 3x + 12º$



x = ; $\hat{\alpha}$ = ; $\hat{\beta}$ = ; $\hat{\gamma}$ =

b. $\overrightarrow{k}$ es bisectriz de $\hat{o}$; $\hat{\sigma} = 3x$; $\hat{\delta} = 2x + 21º$



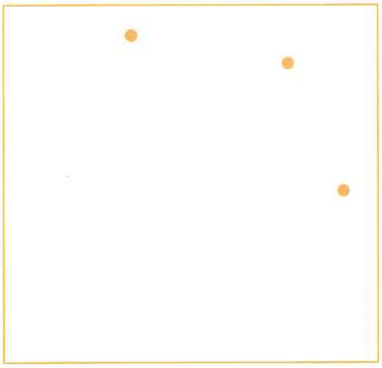
x = ; $\hat{\sigma}$ = ; $\hat{\delta}$ = ; $\hat{\varphi}$ =

18. **Construyan los triángulos pedidos. Luego, tracen en cada uno la circunferencia inscripta.**

a. Un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 6 cm y 7 cm.

b. Un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7,5 cm y 4 cm.

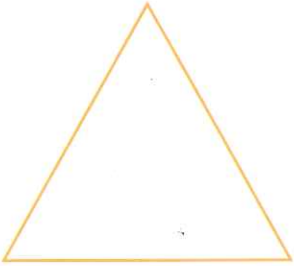
19. **Tracen una circunferencia que pase por los tres puntos dados.**



20. **Construyan un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados congruentes midan 6,5 cm. Encuentren el baricentro.**

21. **Construyan un triángulo isósceles cuya base mida 6 cm y la altura correspondiente a esa base, 8 cm. Encuentren el ortocentro.**

22. **Encuentren los puntos notables del siguiente triángulo. Expliquen si es posible trazar la recta de Euler.**



23. **Observen las medidas de los lados de cada triángulo y marquen con una X los que formen un triángulo rectángulo.**

a. $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{bc}$ = 4,2 cm; $\overline{ac}$ = 5,6 cm. ☐

b. $\overline{de}$ = 4,8 m; $\overline{ef}$ = 6,4 m; $\overline{df}$ = 8 m. ☐

c. $\overline{gh}$ = 7 cm; $\overline{hi}$ = 9 cm; $\overline{gi}$ = 10,5 cm. ☐

24. **Calculen y respondan.**

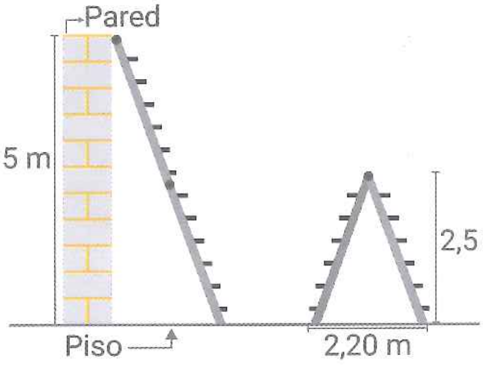
a. ¿Cuál es la altura de un triángulo equilátero de 6 cm de lado?

b. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo cuya base es de 6 m y su altura, 8 m?

c. ¿Cuánto mide el perímetro de un triángulo isósceles cuya base es de 18 cm y la altura correspondiente a esa base, 12 cm?

25. **Lean atentamente y respondan.**

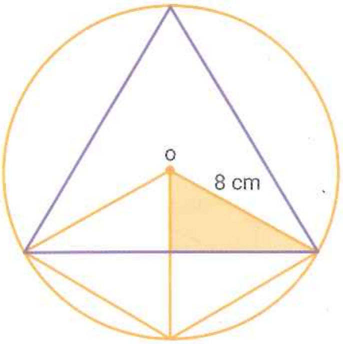
Una escalera de dos hojas, abierta, llega hasta los 2,50 m de altura, y sus hojas quedan separadas 2,20 m. Puede articularse formando una escalera de una sola hoja (con una hoja a continuación de la otra) como se ve en la siguiente imagen.



a. ¿Qué largo alcanza la escalera articulada como en la imagen?

b. ¿A qué distancia de la pared hay que apoyar su base para alcanzar los 5 m de altura?

26. **Calculen el lado de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia de radio 8 cm. Tengan en cuenta el diagrama para resolver.**



26. Clasificación y propiedades de los cuadriláteros

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **cuadrilátero** a todo polígono de cuatro lados.
Los **cuadriláteros** se **clasifican** según la cantidad de lados opuestos paralelos.

- **Paralelogramos**: tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

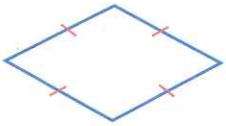
TIP

Los lados que están marcados con la misma cantidad de rayitas son congruentes.

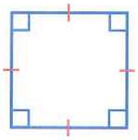
PARALELOGRAMO

- **Rectángulo**
Con 4 ángulos rectos.

- **Rombo**
Con 4 lados congruentes.

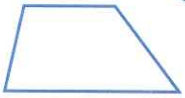


- **Cuadrado**
Es un rectángulo y un rombo.



- **Trapecios**: tienen solo un par de lados opuestos paralelos.

TRAPECIO

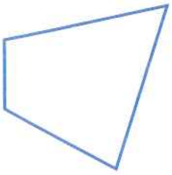


- **Trapecio isósceles**
Con dos lados opuestos (no paralelos) congruentes.

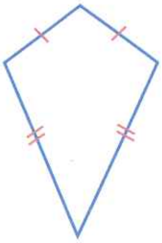
- **Trapecio rectángulo**
Con un ángulo recto.

- **Trapezoides**: no tienen lados paralelos.

TRAPEZOIDE



- **Romboide**
Con dos pares de lados consecutivos congruentes.

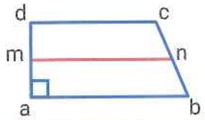
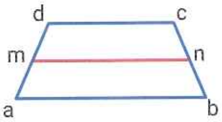


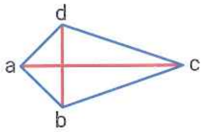
26. Clasificación y propiedades de los cuadriláteros

Propiedades de los cuadriláteros

En las siguientes tablas se explican las propiedades de los cuadriláteros.

Paralelogramos (en general)	• Los lados opuestos son paralelos y congruentes. • Los ángulos opuestos son congruentes. • Las diagonales se cortan mutuamente en su punto medio.	**Rectángulos** • Cumplen las tres propiedades anteriores. • Tienen cuatro ángulos rectos. • Las diagonales son congruentes. **Rombos** • Cumplen las tres propiedades anteriores. • Tienen cuatro lados congruentes. • Las diagonales son perpendiculares.	**Cuadrados** • Cumplen todas las propiedades anteriores.

Trapecios	**Trapecio rectángulo** 	• Tienen dos ángulos rectos.	• La base media $\overline{mn}$ está determinada por los puntos medios de los lados no paralelos. $\overline{mn} = \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{2}$
	Trapecio isósceles 	• Los lados no paralelos son congruentes.	

Trapezoides	**Romboide** 	• $\hat{b} \cong \hat{d}$ • La diagonal principal $\overline{ac}$ está incluida en la bisectriz del $\hat{a}$ y del $\hat{c}$ y en la mediatriz del $\overline{bd}$.	**TIP** $\cong$ significa "es congruente con".

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/cuad * para mirar un video sobre la clasificación y las propiedades de los cuadriláteros.

* Enlace acortado de https://youtu.be/LXLelXSyqRc

TEST DE COMPRENSIÓN

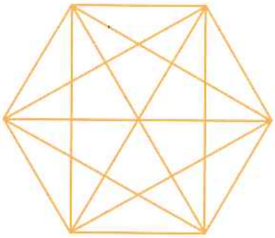
1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿Todo rectángulo es un cuadrado o todo cuadrado es un rectángulo?
   b. ¿Es cierto que un trapezoide es un cuadrilátero con un par de lados paralelos?
   c. Realicen una tabla colocando los nombres de los cuadriláteros en la primera columna y las características de las diagonales de cada uno en la segunda columna.

26. Clasificación y propiedades de los cuadriláteros

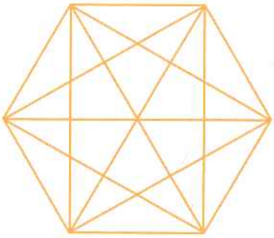
27. Lean atentamente y resuelvan.

a. Pinten las regiones necesarias de cada hexágono regular para obtener el cuadrilátero pedido en cada caso.

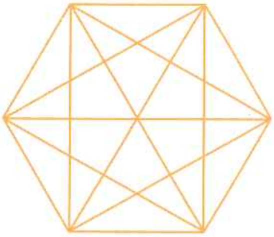
- Paralelogramo.



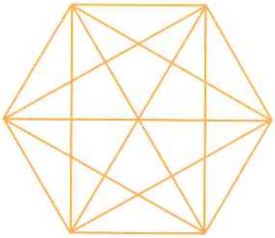
- Rectángulo.



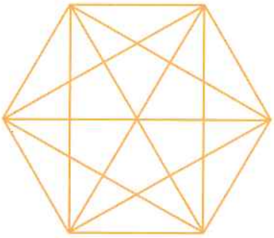
- Trapecio isósceles.



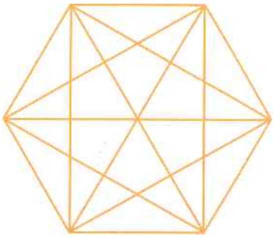
- Trapecio rectángulo.



- Rombo.



- Romboide.



b. Comparen sus producciones con las de su compañero de banco. ¿Ambos lo hicieron igual? ¿Por qué?

28. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen las respuestas.

a. Todos los cuadrados son rombos. ☐

b. Un paralelogramo puede tener todos sus lados distintos. ☐

c. Un romboide tiene los lados opuestos paralelos. ☐

d. Todo trapecio isósceles tiene dos pares de lados congruentes. ☐

29. Completen cada dibujo para que se forme el cuadrilátero indicado.

a. Cuadrado.

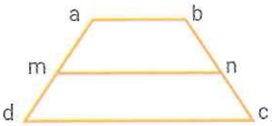
b. Trapecio rectángulo.

30. Calculen el valor de x y la medida de los lados de cada cuadrilátero.

a. abcd trapecio isósceles.

$\overline{ab} = 2x - 2$ cm; $\overline{cd} = 5x - 8$ cm

$\overline{mn} = 3x - 1$ cm; $\overline{ad} = \frac{1}{2} . \overline{ab}$ cm



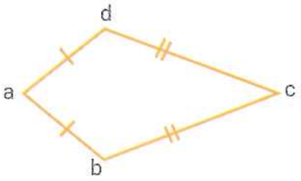
x = ____ ; $\overline{ab}$ = ____ ; $\overline{ad}$ = ____ ;

$\overline{cd}$ = ____ ; $\overline{cb}$ = ____

b. abcd romboide.

$\overline{ab} = 2x + 3$ cm; $\overline{dc} = 3x + 4$ cm

Perímetro: 84 cm

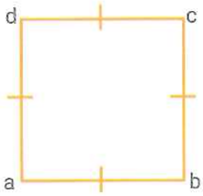


x = ____ ; $\overline{ab}$ = ____ ; $\overline{ad}$ = ____ ;

$\overline{cd}$ = ____ ; $\overline{cb}$ = ____

c. abcd cuadrado.

$\overline{ab} = 3x - 6$ cm; $\overline{dc} = x + 8$ cm



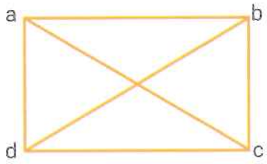
x = ____ ; $\overline{ab}$ = ____ ; $\overline{ad}$ = ____ ;

$\overline{cd}$ = ____ ; $\overline{cb}$ = ____

d. abcd rectángulo.

$\overline{ac} = 2x + 16$ cm; $\overline{bd} = 7x - 19$ cm

$\overline{dc} = 3x + 3$ cm



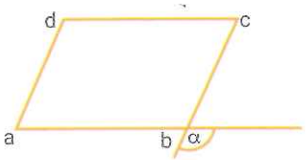
x = ____ ; $\overline{ab}$ = ____ ; $\overline{ad}$ = ____ ;

$\overline{cd}$ = ____ ; $\overline{cb}$ = ____

31. Calculen el valor de x y la medida de cada ángulo interior. Expliquen las respuestas.

a. abcd paralelogramo.

$\hat{c} = 16x + 3°$; $\hat{\alpha} = 30x - 7°$

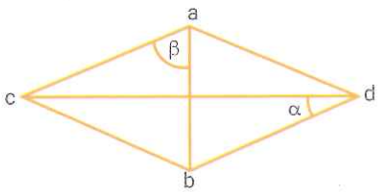


x = ____ ; $\hat{a}$ = ____ ; $\hat{b}$ = ____ ;

$\hat{c}$ = ____ ; $\hat{d}$ = ____

b. abcd es un rombo.

$\hat{\alpha} = 6x + 1°$; $\hat{\beta} = 12x - 19°$



x = ____ ; $\hat{a}$ = ____ ; $\hat{b}$ = ____ ;

$\hat{c}$ = ____ ; $\hat{d}$ = ____

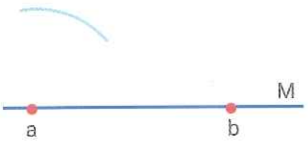
27. Construcciones geométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

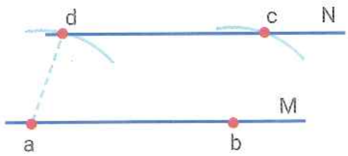
Construcción de un paralelogramo conociendo dos lados no paralelos

Para **construir un paralelogramo** a partir de dos lados no paralelos, se pueden seguir estos pasos:

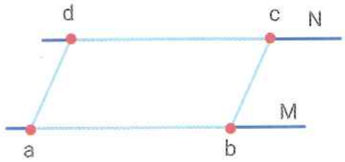
Datos:



1. Se traza la recta M y con el compás se determina $\overline{ab}$. Con centro en a se traza un arco de radio $\overline{ad}$.



2. Se traza la recta N paralela a M, de modo que corte al arco en el punto d. Con centro en b, se traza un arco de radio $\overline{ad}$ que corte a N en el punto c.

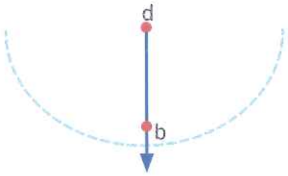


3. Se unen los puntos a, b, c y d para formar el paralelogramo.

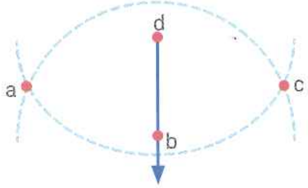
Construcción de un rombo conociendo la medida del lado

Para **construir un rombo** a partir de uno de sus lados, se pueden seguir estos pasos:

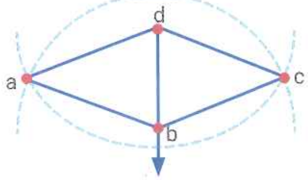
Dato:



1. Se traza una semirrecta de origen d y sobre ella se marca un punto b. Con centro en d, se determina un arco de radio $\overline{ab}$.



2. Con centro en b, se traza un arco de radio $\overline{ab}$ que corte al anterior. Donde se cortan los arcos quedan determinados los puntos a y c.



3. Se unen los puntos a, b, c y d para formar el rombo.

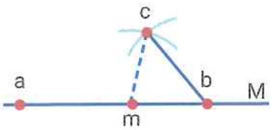
27. Construcciones geométricas

Construcción de un trapecio conociendo las bases y los lados no paralelos

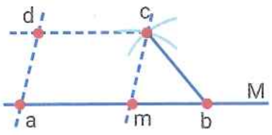
Para **construir un trapecio** a partir de sus bases y sus lados no paralelos, se pueden seguir estos pasos:

Datos:

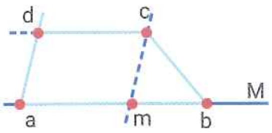
1. Se traza la recta M y con el compás se determina $\overline{ab}$.
Con centro en a, se traza un arco de radio $\overline{cd}$ que corte a M en m.



2. Con centro en m, se traza un arco de radio $\overline{ad}$ y con centro en b, otro de radio $\overline{bc}$. La intersección de los arcos determina el punto c.



3. Se traza una recta paralela a $\overline{ab}$ que pase por el punto c y una recta paralela a $\overline{mc}$ que pase por el punto a. La intersección de las rectas determina el punto d.



4. Se unen los puntos a, b, c y d para formar el trapecio.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/const* para realizar una construcción de un paralelogramo usando GeoGebra.

* Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/ESSfvRMZ

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿Cuántos paralelogramos distintos se pueden construir si se conocen su base y su altura?
   b. ¿Cuántos rombos distintos se pueden construir si se conocen sus diagonales?
   c. ¿Cuántos trapecios distintos se pueden construir si se conocen su base y su altura?
   d. ¿Qué datos son suficientes para que la construcción de un paralelogramo sea única?

27. Construcciones geométricas

32. Reúnanse con un compañero y resuelvan.

a. Elijan una figura geométrica y escriban instrucciones para que su compañero la construya en una hoja lisa.

b. Intercambien sus producciones con su compañero y realicen el dibujo siguiendo las instrucciones. ¿Ambos pudieron llegar al dibujo de la figura que eligió el otro? Si la respuesta es no, expliquen cuáles fueron los errores y cómo lo pueden solucionar.

33. Construyan un cuadrilátero que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso. Luego, indiquen si la construcción es única y expliquen porqué.

a. Un paralelogramo cuyos lados no paralelos midan 3 cm y 5 cm.

b. Un romboide cuyas diagonales midan 6 cm y 4 cm.

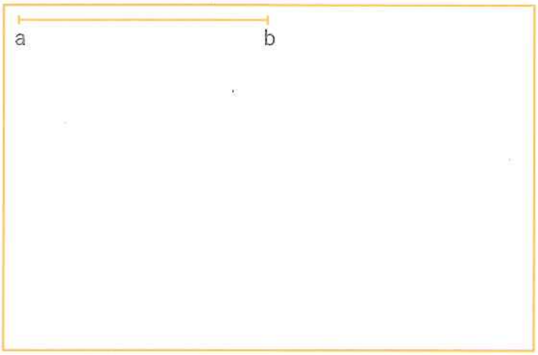
c. Un trapecio isósceles cuyas bases midan 5 cm y 3 cm, y su altura 2,5 cm.

d. Un rombo cuyas diagonales midan 4 cm y 3 cm.

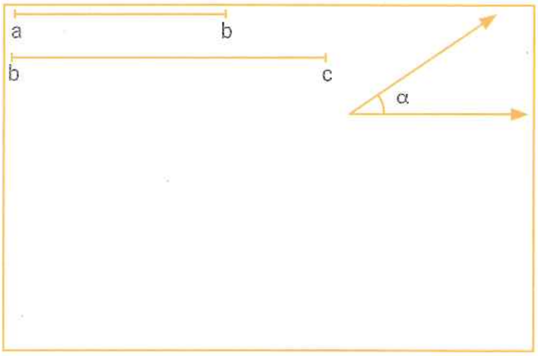
27. Construcciones geométricas

34. Tengan en cuenta los datos de cada figura y realicen las construcciones pedidas.

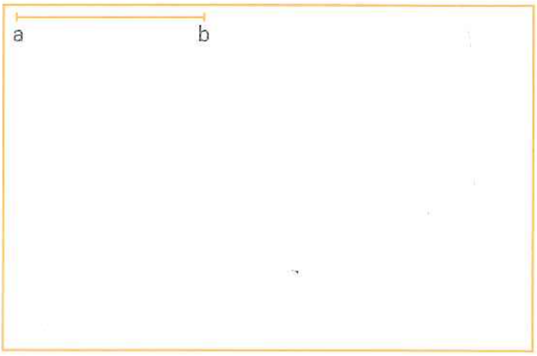
a. Cuadrado de lado $\overline{ab}$.



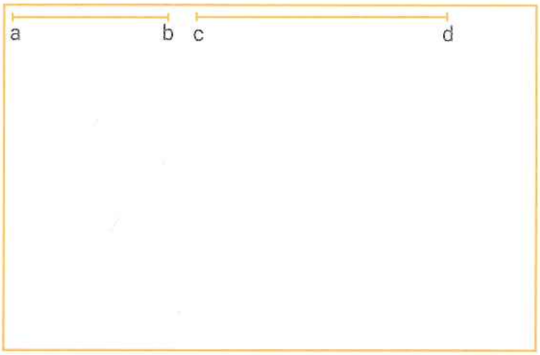
b. Paralelogramo de lados $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y ángulo α.



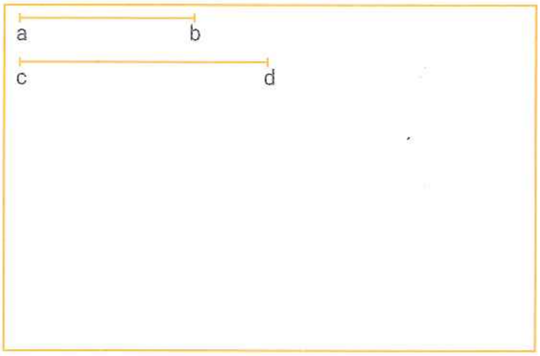
c. Rombo de lado $\overline{ab}$.



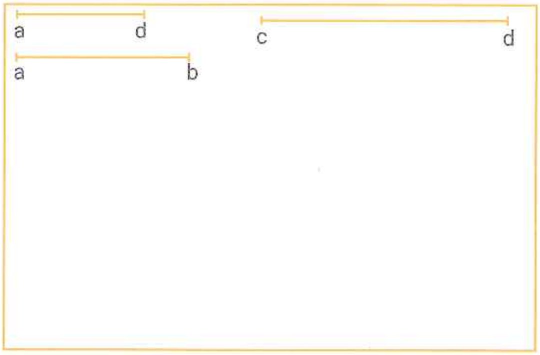
d. Romboide de lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$.



e. Trapecio rectángulo de lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ paralelos.



f. Trapecio isósceles de bases $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ y lado $\overline{ad}$ no paralelo.



35. Tengan en cuenta la actividad anterior y comparen sus construcciones con las de sus compañeros. Luego, indiquen cuáles son distintas y porqué.

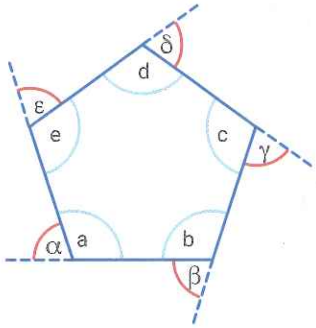
28. Propiedades de los polígonos

▶ SABERES DINÁMICOS

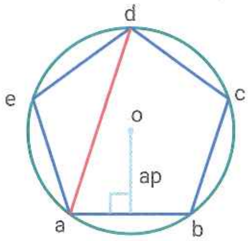
Un **polígono** es la región del plano limitada por tres o más rectas que se intersecan de a dos.

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ y $\hat{e}$ son ángulos interiores.

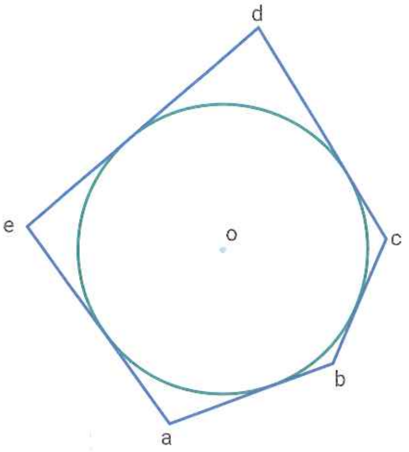
Al prolongar los lados del polígono quedan determinados los ángulos exteriores: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$.



- Un polígono está **inscripto** en una circunferencia cuando todos sus vértices pertenecen a ella.
- Se denomina **diagonal** a todo segmento que tiene como extremos dos vértices no consecutivos; $\overline{ad}$ es una diagonal del polígono abcde.
- Cuando un polígono tiene todos sus lados y sus ángulos interiores iguales entre sí, se dice que es **regular**.
- Se denomina **apotema** de un polígono regular al segmento perpendicular a un lado del polígono cuyos extremos son el punto medio del lado y el centro de la circunferencia en la que está inscripto; $\overline{ap}$ es apotema del polígono regular abcde.



- Un polígono está **circunscripto** en una circunferencia cuando todos sus lados son segmentos tangentes a ella.



Propiedades de los polígonos

- En un polígono de "n" lados se pueden trazar "n – 3" diagonales desde un vértice.
- En un polígono de "n" lados se pueden trazar en total $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonales.
- En todo polígono de "n" lados, la suma de los ángulos interiores (S.A.I.) es 180° . (n – 2).
- En todo polígono de "n" lados, la suma de los ángulos exteriores (S.A.E.) es 360°.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿Cuál es la suma entre la medida de un ángulo interior de un polígono y la de su ángulo exterior correspondiente?
   b. El cuadrado ¿es un polígono regular?
   c. En un heptágono: ¿cuántas diagonales se pueden trazar? ¿Cuál es la suma de sus ángulos interiores? Usen las fórmulas correspondientes para calcular.

ACTIVIDADES

28. Propiedades de los polígonos

36. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un octógono? ____________________

____

b. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar por vértice en un dodecágono (12 lados)? ____________________

____

c. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un pentágono regular? ____________________

____

d. ¿Cuántos lados tiene un polígono en el que se pueden trazar 20 diagonales? ____________________

____

e. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un decágono regular? ____________________

____

f. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos exteriores miden 60° cada uno? ____________________

____

g. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un polígono regular cuya suma de ángulos interiores es 1 260°? ____________________

h. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un polígono regular cuya suma de ángulos interiores es 720°? ____________________

37. Completen la tabla.

Polígono regular	Cantidad de lados	Ángulo central	S.A.I.	Ángulo interior	Ángulo exterior	Diagonales por vértice	Diagonales totales
		120°					
				90°			
			540°				
Octógono							
						9	
n lados							

____

____

____

____

29. Perímetro y área

▶ SABERES DINÁMICOS

Medir es comparar una cantidad con otra considerada como unidad de medida.

Unidades de longitud

Las siguientes **unidades** se utilizan para **medir longitudes**.

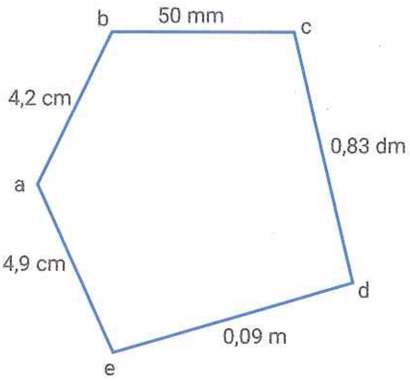
	:10		:10		:10		:10		:10		:10	
km kilómetro		hm hectómetro		dam decámetro		m metro		dm decímetro		cm centímetro		mm milímetro
	. 10		. 10		. 10		. 10		. 10		. 10	

Perímetro

El **perímetro** es la longitud del contorno de una figura.

- Para averiguar el perímetro de un polígono se suman las medidas de sus lados.
- Para calcular el perímetro de una figura todos los datos deben estar expresados en la misma unidad de longitud.

Calculen el perímetro del pentágono abcde.



50 mm = 5 cm
0,83 dm = 8,3 cm
0,09 m = 9 cm
Perímetro abcde = 5 cm + 8,3 cm + 9 cm + 4,9 cm + 4,2 cm
Perímetro abcde = 31,4 cm

Unidades para medir superficies

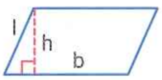
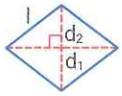
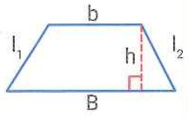
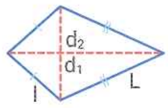
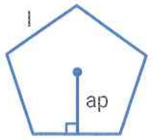
Las siguientes **unidades** se utilizan para **medir superficies**.

	:100		:100		:100		:100		:100		:100	
km^2 kilómetro cuadrado		hm^2 hectómetro cuadrado		dam^2 decámetro cuadrado		m^2 metro cuadrado		dm^2 decímetro cuadrado		cm^2 centímetro cuadrado		mm^2 milímetro cuadrado
	. 100		. 100		. 100		. 100		. 100		. 100	

29. Perímetro y área

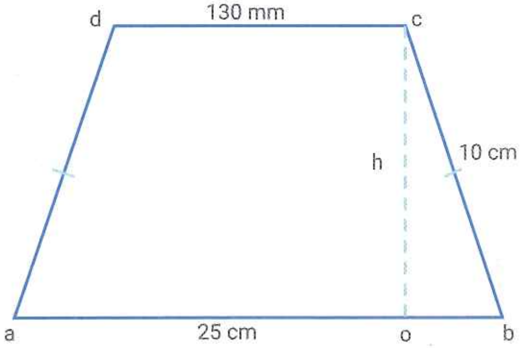
Área

El **área** de una figura es la medida de su superficie.
En la siguiente tabla aparecen las fórmulas para calcular el área de distintas figuras.

	Paralelogramo	Rombo	Trapecio	Romboide	Polígono regular
Figura					
Área	$b \cdot h$	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	$\frac{h \cdot (B + b)}{2}$	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	$\frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2}$

- Para calcular el área del rectángulo y del cuadrado se puede usar la misma fórmula que en el paralelogramo.
- Para calcular el área de una figura todos los datos deben estar expresados en la misma unidad de medida.

Calculen el área del trapecio isósceles abcd.



130 mm = 13 cm

$\overline{ob} = \frac{25\text{ cm} - 13\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}$

Con el teorema de Pitágoras se averigua la altura:

$h^2 = \overline{bc}^2 - \overline{ob}^2$

$h^2 = (10\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2$

$h = 8\text{ cm}$

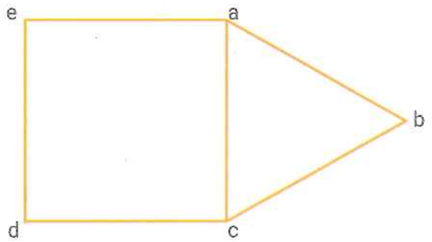
$\text{Área abcd} = \frac{8\text{ cm} \cdot (25\text{ cm} + 13\text{ cm})}{2} = 152\text{ cm}^2$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo que tiene dos lados de 4 dm y dos lados de 20 cm?
   b. ¿Cuántos cuadrados de 1 cm de lado entran en un cuadrado de 1 dm de lado?
   c. ¿Por qué es posible utilizar la misma fórmula para calcular el área del paralelogramo, del rectángulo y del cuadrado?
   d. ¿Cómo se puede simplificar la fórmula para calcular el área del cuadrado?

29. Perímetro y área

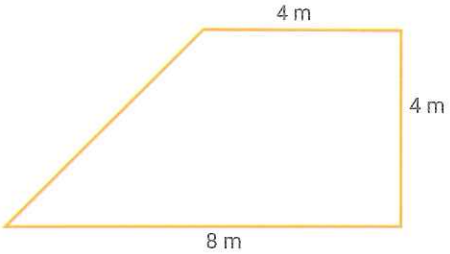
38. **Tengan en cuenta que el perímetro del triángulo equilátero abc es 18 cm y calculen el perímetro del cuadrado acde. Luego, marquen con una X la opción correcta.**



- 6 cm ☐
- 24 cm ☐
- 36 cm ☐
- 72 cm ☐

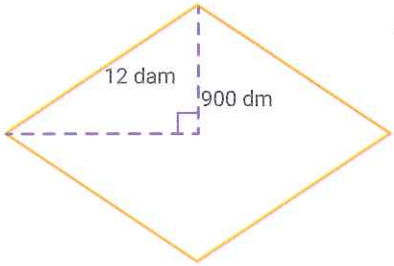
39. **Hallen el perímetro y el área de las siguientes figuras. Escriban los resultados en m o m², según corresponda.**

a. Trapecio rectángulo.



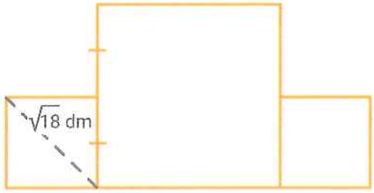
Perímetro = ☐ ; área = ☐

b. Rombo.



Perímetro = ☐ ; área = ☐

c. Figura formada por tres cuadrados.

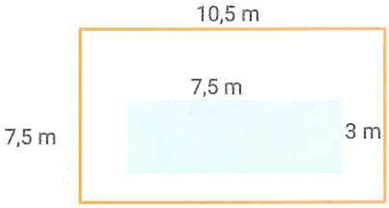


Perímetro = ☐ ; área = ☐

40. Lean atentamente y resuelvan.

a. Nicolás quiere embaldosar el patio rectangular de su nueva casa que mide 5,25 m de largo y 3 m de ancho. Si las baldosas son cuadradas de 25 cm de lado, ¿cuántas necesita? Expliquen cómo lo pensaron.

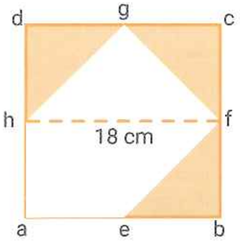
b. Vera quiere embaldosar la vereda de una pileta rectangular como la del dibujo. Si las baldosas son cuadradas de 30 cm de lado, ¿cuántas necesita? Expliquen cómo lo pensaron.



c. Para pintar un tapial de 23 m de largo por 1,60 m de alto Agus compró 10 litros de pintura. En las indicaciones dice que la pintura rinde 10 m² por litro y por mano. ¿Alcanza la pintura comprada para pintar dos manos del tapial? Expliquen cómo lo pensaron.

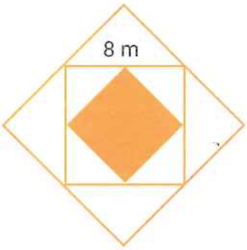
41. Calculen el área pintada de cada figura.

a. e, f, g y h son puntos medios de los lados del cuadrado abcd.



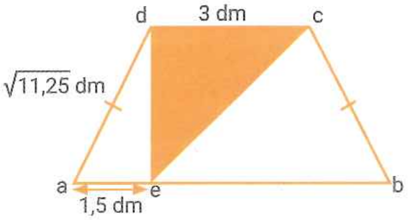
Área =

b. Los vértices de los cuadrados más chicos están en el punto medio del lado del cuadrado grande.



Área =

c. abcd es trapecio; cde es triángulo rectángulo.



Área =

Integración final

42. Escriban los nombres de todos los cuadriláteros que cumplen cada condición.

a. Tienen un solo par de lados opuestos paralelos.

b. Tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

c. Tienen sus cuatro lados congruentes.

d. Tienen solo un par de ángulos congruentes.

e. Tienen dos pares de ángulos opuestos congruentes.

f. Tienen sus cuatro ángulos congruentes.

g. Sus diagonales son perpendiculares.

h. Sus diagonales son congruentes.

43. Calculen el valor de x y la medida de los lados de cada cuadrilátero.

a. abcd paralelogramo.

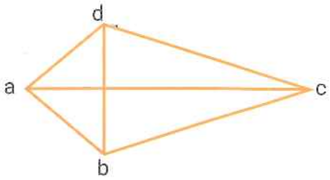
$\overline{ab} = 4x + 6$ cm; $\overline{am} = \overline{ab} - 8$ cm;
$\overline{mn} = 2x + 10$ cm; $\overline{mn}$ es base media.

x = ; $\overline{ab}$ = ; $\overline{ad}$ = ;
$\overline{cd}$ = ; $\overline{bc}$ =

b. abcd romboide.

$\overline{ab} = 3x - 2$ cm; $\overline{ad} = 2x + 3$ cm

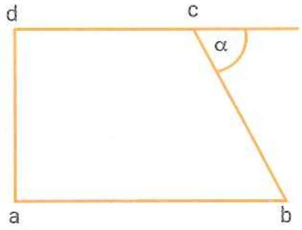
Perímetro: 78 cm



x = ; $\overline{ab}$ = ; $\overline{ad}$ = ;
$\overline{cd}$ = ; $\overline{bc}$ =

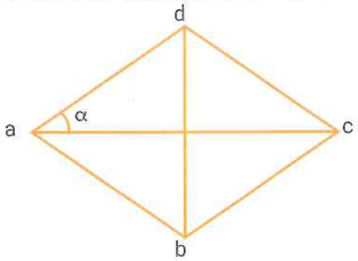
44. Calculen los ángulos interiores de los siguientes cuadriláteros.

a. abcd es un trapecio rectángulo; $\hat{\alpha} = 47° 15'$.



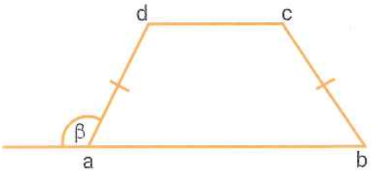
$\hat{a}$ =
$\hat{b}$ =
$\hat{c}$ =
$\hat{d}$ =

b. abcd es un rombo; $\hat{\alpha} = 40°$.



$\hat{a}$ =
$\hat{b}$ =
$\hat{c}$ =
$\hat{d}$ =

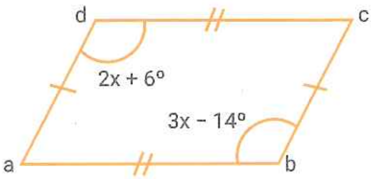
c. abcd es un trapecio isósceles; $\hat{\beta} = 115° 25'$.



$\hat{a}$ =
$\hat{b}$ =
$\hat{c}$ =
$\hat{d}$ =

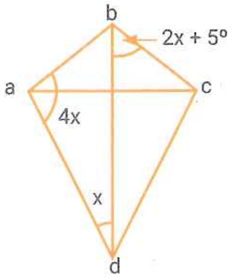
45. Calculen el valor de x y la medida de los ángulos interiores de cada cuadrilátero.

a. abcd es un paralelogramo.



x =
$\hat{a}$ =
$\hat{b}$ =
$\hat{c}$ =
$\hat{d}$ =

b. abcd es un romboide.



x =
$\hat{a}$ =
$\hat{b}$ =
$\hat{c}$ =
$\hat{d}$ =

46. Construyan la figura pedida en cada caso.

a. Un rectángulo que tenga 8,5 cm de base y un área de 34 cm^2.

b. Un rombo con una diagonal de 6 cm y la otra de 8 cm.

c. Un paralelogramo cuya base mida 5,5 cm y sus diagonales, 7 cm y 4,2 cm.

d. Un cuadrado inscripto en una circunferencia de 3,5 cm de radio.

47. Resuelvan.

a. Calculen la suma de los ángulos interiores de un dodecágono.

b. Calculen la medida del ángulo interior de un polígono regular de 20 lados.

c. En un polígono la suma de sus ángulos interiores es igual a la suma de los ángulos exteriores. ¿Cuántos lados tiene ese polígono?

d. ¿Cuál es la medida del ángulo central de un heptágono regular?

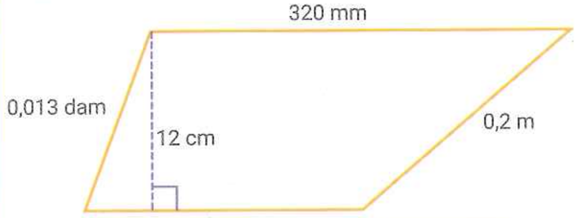
e. Si un polígono tiene 27 diagonales totales, ¿cuántos lados tiene?

48. Calculen el perímetro y el área de cada figura. Expresen el resultado en cm o cm^2, según corresponda.

a. Trapecio isósceles.

Perímetro = ; área =

b. Trapecio.



Perímetro = ; área =

49. Lean atentamente y resuelvan.

a. Damián compró un lote rectangular que mide 12,5 m de frente y 43,5 m de fondo.

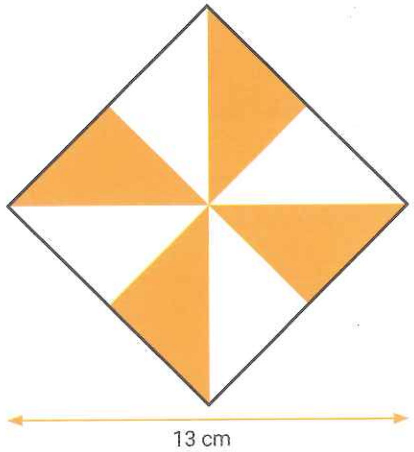
- El lote ¿mide más o menos de 450 m^2 de área?
- ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el lote completo?

b. ¿Cuántos metros cuadrados ocupa una carpa de un circo cuyo piso tiene forma de decágono regular de 14 m de lado y 21,5 m de apotema?

c. Un cuadrado y un rectángulo tienen igual área. Si el rectángulo mide 12,25 cm de base y 16 cm de altura, ¿cuál es el perímetro del cuadrado?

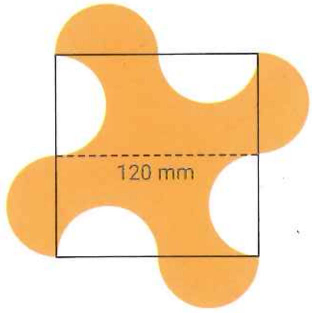
50. Calculen el área sombreada en cada figura.

a. La figura determinada por los segmentos negros es un cuadrado.



Área sombreada =

b. La figura determinada por los segmentos negros es un cuadrado y la línea punteada negra es base media del cuadrado.



Área sombreada =

5 Razones y proporciones

30. Razones y proporciones aritméticas

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **razón** entre dos números a y b (b ≠ 0) al cociente entre esos números.
En la razón $\frac{a}{b}$ o a : b con b ≠ 0, **a** recibe el nombre de **antecedente** y **b** el de **consecuente**.

En la razón $\frac{7}{4}$ *7 es el antecedente y 4 es el consecuente y su razón es $\frac{7}{4} = 1,75$*

En la razón $\frac{2,5}{5}$ *2,5 es el antecedente y 5 es el consecuente y su razón es $\frac{2,5}{5} = 0,5$*

Se llama **proporción aritmética** a la igualdad entre dos razones.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con b ≠ 0 y d ≠ 0; "**a** es a **b** como **c** es a **d**"

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y **d** son los **extremos** de la proporción.
b y **c** son los **medios** de la proporción.
d es el **cuarto proporcional**.

$\frac{3}{12} = \frac{6}{24}$ "3 es a 12, como 6 es a 24"

Se cumple que $\frac{3}{12} = 0,25$ y $\frac{6}{24} = 0,25$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

a y **c** son los **extremos** de la proporción.
Cada uno de los **b** es un **medio** de la proporción.
c es el **tercero proporcional**.

$\frac{4,5}{3} = \frac{3}{2}$ "4,5 es a 3, como 3 es a 2"

Se cumple que $\frac{4,5}{3} = 1,5$ y $\frac{3}{2} = 1,5$.

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a \,.\, d = b \,.\, c$$

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} \longrightarrow 2 \,.\, 21 = 42 \text{ y } 3 \,.\, 14 = 42$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Con qué operación se relaciona el concepto de razón entre dos números?
   b. ¿Qué valores puede tener el antecedente? ¿Y el consecuente?
   c. Si el antecedente y el consecuente de una razón son iguales, ¿cuánto vale la razón?
   d. En la proporción $\frac{5}{10} = \frac{x}{20}$, ¿cuál es el valor de x? Resuelvan utilizando la propiedad fundamental de las proporciones.

ACTIVIDADES

30. Razones y proporciones aritméticas

1. **Lean atentamente y resuelvan.**

Una prueba de matemática tiene 10 preguntas. Un alumno responde correctamente 6 de estas preguntas, 3 las responde mal y una la deja sin contestar. Escriban la razón entre:

a. El número de preguntas correctas y el número total de preguntas. $\frac{\square}{\square} = \square$

b. El número de respuestas incorrectas y el número total de preguntas. $\frac{\square}{\square} = \square$

c. El número de preguntas que no respondió y el total de preguntas. $\frac{\square}{\square} = \square$

d. El número que suman las tres razones anteriores. $\frac{\square}{\square} = \square$

2. **Unan con flechas las razones que son iguales.**

a. $\frac{0,5}{5}$	• $\frac{9}{-6}$
b. $\frac{4}{16}$	• $\frac{-2,5}{-4}$
c. $\frac{-3}{2}$	• $\frac{1}{10}$
d. $\frac{-5}{-8}$	• $\frac{-26}{-10}$
e. $\frac{13}{5}$	• $\frac{-2}{-8}$

3. **Lean atentamente y respondan.**

Dos cursos de tercero de una escuela se comprometieron a plantar árboles. En la secretaría registraron en una tabla la cantidad de estudiantes de cada curso comprometidos para esta actividad.

a. Completen la tabla.

Tipo de árbol	Estudiantas de 3.° A	Estudiantas de 3.° B	Total
Eucaliptos	14	8	
Fresnos	12	16	
Paraísos	8	22	
Total			

b. Escriban la razón correspondiente en cada caso.

- La cantidad de estudiantes de 3.° A que plantarán fresnos y el total de estudiantes. $\frac{\square}{\square} = \square$
- La cantidad de estudiantes que plantarán eucaliptos y el total de estudiantes. $\frac{\square}{\square} = \square$
- La cantidad de estudiantes de 3.° B que plantarán paraísos y el total de estudiantes de 3.° B. $\frac{\square}{\square} = \square$
- La cantidad de estudiantes de 3.° A que plantarán eucaliptos y el total de estudiantes que plantarán este tipo de árbol. $\frac{\square}{\square} = \square$

c. Investiguen cuáles son los beneficios de plantar árboles para el medio ambiente.

30. Razones y proporciones aritméticas

4. Completen con el valor del cuarto proporcional correspondiente.

a. $\frac{15}{70} = \frac{30}{\square}$ c. $\frac{16}{12} = \frac{8}{\square}$ e. $\frac{3,6}{2,4} = \frac{15}{\square}$ g. $\frac{5}{1,2} = \frac{20}{\square}$

b. $\frac{3}{5} = \frac{12}{\square}$ d. $\frac{7}{8} = \frac{56}{\square}$ f. $\frac{7,5}{3} = \frac{5}{\square}$ h. $\frac{1,5}{3,5} = \frac{4,5}{\square}$

5. Completen con el valor del tercero proporcional correspondiente.

a. $\frac{1,2}{5} = \frac{5}{\square}$ b. $\frac{9}{4,5} = \frac{4,5}{\square}$ c. $\frac{12,5}{2} = \frac{2}{\square}$ d. $\frac{3,2}{4} = \frac{4}{\square}$

6. Completen con el valor de los medios sabiendo que son iguales.

a. $\frac{0,1}{\square} = \frac{\square}{0,4}$ b. $\frac{0,4}{\square} = \frac{\square}{90}$ c. $\frac{1,5}{\square} = \frac{\square}{42,\overline{6}}$ d. $\frac{0,0081}{\square} = \frac{\square}{10\,000}$

7. Marquen con una X la opción correcta.

a. Si tres lápices cuestan $29,10, ¿cuál de las siguientes expresiones permite determinar el precio de dos lápices?

- $\frac{2}{29,10} = \frac{x}{3}$ ☐
- $\frac{2}{x} = \frac{3}{29,10}$ ☐
- $\frac{x}{2} = \frac{3}{29,10}$ ☐
- $\frac{2}{x} = \frac{29,10}{3}$ ☐

b. Para producir cuatro cajas de un medicamento se necesitan 25,4 mg de un compuesto. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite determinar los mg necesarios del compuesto para producir siete cajas del mismo medicamento?

- $\frac{4}{25,4} = \frac{7}{x}$ ☐
- $\frac{4}{25,4} = \frac{x}{7}$ ☐
- $\frac{4}{7} = \frac{x}{25,4}$ ☐
- $\frac{25,4}{x} = \frac{7}{4}$ ☐

8. Lean atentamente y resuelvan planteando la proporción correspondiente.

a. Una empresa puede construir 120 m² de carretera por día usando cuatro máquinas. ¿Cuántas máquinas necesita para construir 480 m² de carretera en un día?

b. Para un campamento, los 28 estudiantes de tercero calcularon que gastarán $19 600 en comida. ¿Cuánto gastarán los estudiantes de segundo, en las mismas condiciones, si son tres menos que los de tercero?

c. Camila prepara una receta que incluye tres huevos por cada 12 personas. ¿Cuántos huevos necesita si tiene que prepararla para 20 personas?

d. Juan compró tres cuadernos y pagó en total $337,50. ¿Cuánto cuestan cinco cuadernos?

30. Razones y proporciones aritméticas

9. Hallen el valor de x en cada una de las siguientes proporciones.

a. $\frac{2 + 0,5}{x} = \frac{3,5}{49}$

b. $\frac{30}{100} = \frac{0,1 + 0,5}{x}$

c. $\frac{4,1}{20 - 3,\overline{6}} = \frac{x}{12}$

d. $\frac{2x - 2}{x - 4} = \frac{8}{2}$

e. $\frac{5x}{6} = \frac{3x - 2}{3}$

f. $\frac{54}{x} = \frac{162}{2x + 9}$

g. $\frac{0,9}{x} = \frac{x}{4 . (0,1 + 0,3)}$

h. $\frac{3 . (x - 1)}{4,2 - 1,2} = \frac{x^2}{x - 4}$

31. Propiedades de las proporciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **serie de razones iguales** a la igualdad de tres o más razones.

$\frac{a}{b} = r; \frac{c}{d} = r; \frac{e}{f} = r; ...; \frac{m}{n} = r$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{m}{n}$.

$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15} = \frac{4}{12}$ es una serie de razones iguales. En todos los casos $r = \frac{1}{3}$.

- En toda proporción se verifican las siguientes propiedades.

Propiedades	Fórmulas y ejemplos
1. La suma o la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente, como la suma o la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \longrightarrow \frac{3+4}{4} = \frac{6+8}{8} \longrightarrow \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$
	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \longrightarrow \frac{3-4}{4} = \frac{6-8}{8} \longrightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{2}{8}$
2. La suma o la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a su antecedente, como la suma o la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \longrightarrow \frac{2+3}{2} = \frac{6+9}{6} \longrightarrow \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$
	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \longrightarrow \frac{2-3}{2} = \frac{6-9}{6} \longrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$
3. La suma entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a la diferencia entre los mismos, como la suma entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a la diferencia.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \longrightarrow \frac{5+3}{5-3} = \frac{10+6}{10-6} \longrightarrow \frac{8}{2} = \frac{16}{4}$
4. En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como uno de los antecedentes es a su consecuente.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{m}{n} = \frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. Sabiendo que $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$, completen para que se verifique la propiedad 2. $\frac{11}{8} = \frac{33}{\square}$

b. Sabiendo que $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$, completen para que se verifique la propiedad 3. $\frac{13}{\square} = \frac{\square}{6}$

c. Escriban una serie de cuatro razones iguales. Luego, verifiquen que se cumpla la propiedad 4.

ACTIVIDADES

31. Propiedades de las proporciones

10. Lean atentamente y resuelvan indicando la propiedad de las proporciones que utilizan en cada caso.

a. Sabiendo que $\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{11} = \frac{d}{15}$ y que a + b + c = 36, ¿cuál es el valor de d?

b. Si a + b = 9 y $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?

c. Si a − b = −12 y $\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$, ¿cuáles son los valores de a y b?

11. Planteen la situación y resuelvan aplicando propiedades.

a. La suma entre dos números positivos es 175 y su razón es $\frac{4}{3}$. ¿Cuáles son los números?

b. La diferencia entre el dinero que tiene Juan y el que tiene Ana es de $400. La cantidad de dinero de Juan es a la de Ana como 9 es a 7. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

c. La diferencia entre dos números es −3 y la razón entre ellos es 0,4. ¿Cuáles son los números?

d. Las edades de dos hermanos suman 28 años y la edad del menor es a la del mayor como 2 es a 5. ¿Cuál es la edad de cada uno?

12. Completen aplicando las propiedades de las proporciones.

a. Si $\frac{4}{7} = \frac{16}{28}$, entonces $\frac{\square}{4} = \frac{44}{\square}$.

b. Si $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{15}{20} = \frac{4{,}5}{6}$, entonces $\frac{3}{4} = \frac{\square}{42}$.

c. Si $\frac{2{,}6}{0{,}8} = \frac{10{,}4}{3{,}2}$, entonces $\frac{3{,}4}{1{,}8} = \frac{\square}{\square}$.

d. Si $\frac{1{,}8}{0{,}4} = \frac{2{,}7}{0{,}6}$, entonces $\frac{\square}{0{,}4} = \frac{2{,}1}{\square}$.

13. Tengan en cuenta la razón entre las sumas y respondan.

$$\frac{3 + 12 + 15 + 27 + 18}{16 + 20 + 24 + 32 + 4}$$

a. Separen en cocientes de modo que todos tengan la misma razón. ¿Es posible?

b. ¿Qué valores cambiarían para que se pueda formar una serie de razones iguales?

DinámicaMente

Resuelvan.

Las medidas de los ángulos interiores de un triángulo son proporcionales a 4, 15 y 17. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo?

32. Proporcionalidad directa e inversa

▶ SABERES DINÁMICOS

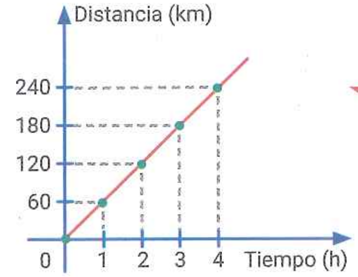
Proporcionalidad directa

Dos variables se relacionan en forma **directamente proporcional** cuando el cociente entre los valores que se corresponden es constante. El número que se obtiene se denomina **constante de proporcionalidad (k)**.

$$\frac{y}{x} = k,\ x \neq 0, \text{ entonces: } y = k \cdot x$$

La distancia recorrida por un auto que mantiene su velocidad constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido. En este caso la constante de proporcionalidad es 60.

Tiempo (horas)	Distancia (km)
1	60
2	120
3	180
4	240



Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]

En los mapas la magnitud representada se relaciona de manera directamente proporcional con la magnitud real. La escala determina cuál es la constante de proporcionalidad en esa relación.
Por ejemplo, si un mapa tiene una escala 1 : 1 000 000, significa que cada centímetro representado equivale a 1 000 000 cm en la realidad.
La fórmula sería: **M = 1 000 000 . m**, con **M**: magnitud real y **m**: magnitud representada.

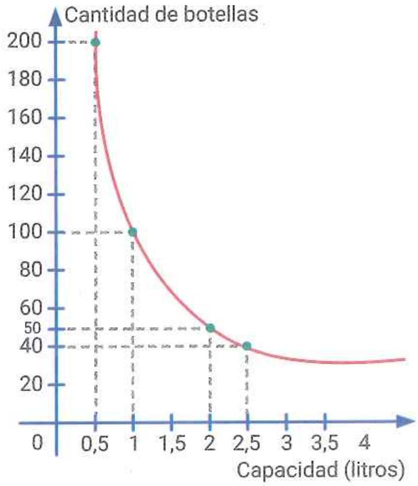
Proporcionalidad inversa

Dos variables se relacionan en forma **inversamente proporcional** cuando el producto entre los valores que se corresponden es constante. El número que se obtiene se denomina **constante de proporcionalidad** (k).

$$y \cdot x = k,\ x \neq 0, \text{ entonces: } y = \frac{k}{x}$$

La cantidad de botellas que se pueden llenar con 100 litros de limonada es inversamente proporcional a la capacidad de las botellas. En este caso la constante de proporcionalidad es 100.

Capacidad (litros)	Cantidad de botellas
0,5	200
1	100
2	50
2,5	40



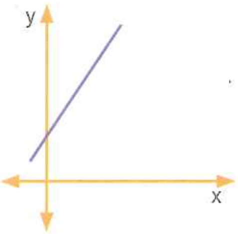
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La relación entre un número y su doble ¿es de proporcionalidad directa, inversa o no es proporcional?
   b. La relación entre la velocidad de un auto y el tiempo que tarda en recorrer un camino determinado ¿es de proporcionalidad directa, inversa o no es proporcional?
   c. ¿Cómo se puede saber si una relación es de proporcionalidad directa o inversa mirando la tabla que relaciona sus datos?

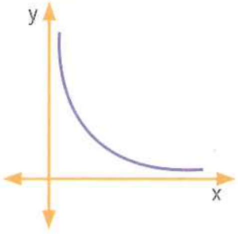
32. Proporcionalidad directa e inversa

14. Marquen con una X los gráficos que pueden representar relaciones de proporcionalidad. Indiquen el tipo de proporcionalidad.

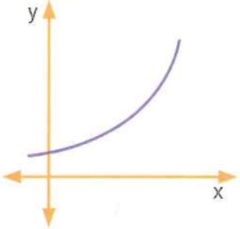
a. ☐



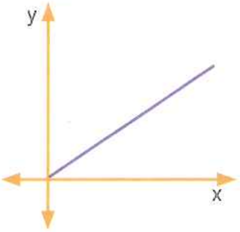
b. ☐



c. ☐



d. ☐



15. Escriban PD (proporcionalidad directa), PI (proporcionalidad inversa) o NP (no proporcional), según corresponda.

a. Velocidad de un auto y tiempo empleado en recorrer una distancia determinada. ☐

b. Cantidad de combustible que consume un auto en recorrer diferentes distancias. ☐

c. Cantidad de trabajadores y cantidad de días que tardan en realizar una determinada tarea. ☐

d. Cantidad de harina necesaria para elaborar un kilo de pan y cantidad de kilos de pan a producir. ☐

e. Cantidad de aceite utilizado y cantidad de empanadas que se pueden freír. ☐

16. Resuelvan.

a. Observen las tablas y escriban PD (proporcionalidad directa) o PI (proporcionalidad inversa), según corresponda. Luego, indiquen la constante de proporcionalidad y la fórmula en cada caso.

x	y
3,5	4,2
−2,5	−3
−4	−4,8
0,50	0,60

☐ k = ________

y = ________

x	y
1,6	1,25
0,8	2,5
−0,4	−5
8	0,25

☐ k = ________

y = ________

x	y
−2	−0,75
−2,5	−0,60
3	0,50
0,4	3,75

☐ k = ________

y = ________

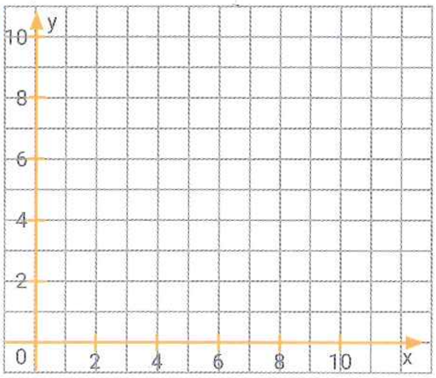
x	y
0,4	0,32
−1,2	−0,96
3	2,4
−0,2	−0,16

☐ k = ________

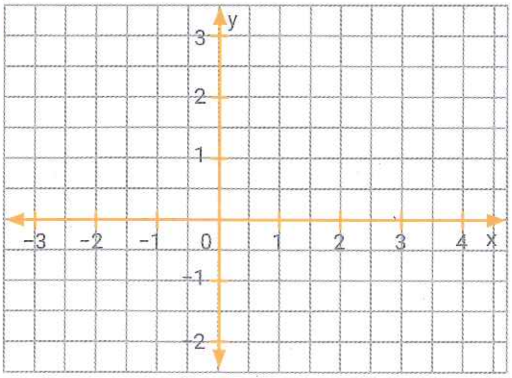
y = ________

b. Grafiquen las relaciones del ítem anterior según corresponda.

PD

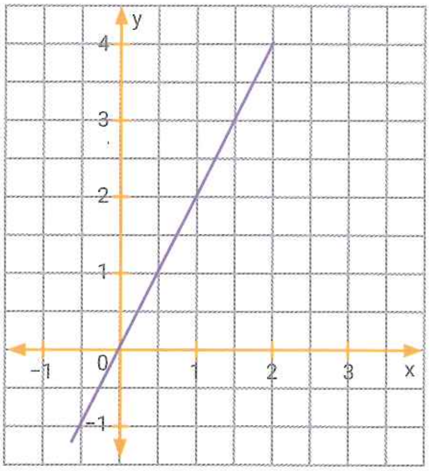


PI



17. Tengan en cuenta los gráficos, completen las tablas y escriban el tipo de relación, la constante de proporcionalidad y la fórmula correspondiente en cada caso.

a.

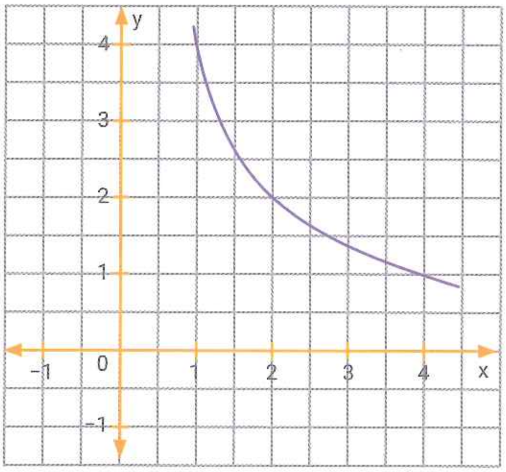


x	y
1	
2	
0	
−1	
−2	

Relación: ____________________

k = ________ ; y = ________

b.



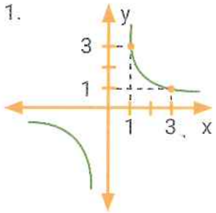
x	y
1	
2	
4	
−1	
−2	

Relación: ____________________

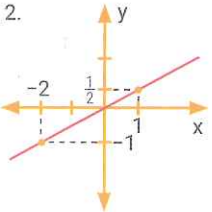
k = ________ ; y = ________

18. Completen con el número de gráfico correspondiente a cada fórmula. Luego, indiquen el tipo de relación de proporcionalidad.

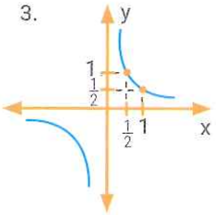
1.



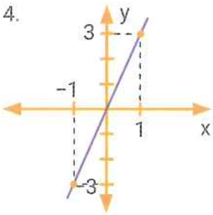
2.



3.



4.



a. $y = \frac{0,5}{x}$

Gráfico: ☐

Relación: ____________

b. $y = 3x$

Gráfico: ☐

Relación: ____________

c. $y = 0,5x$

Gráfico: ☐

Relación: ____________

d. $y = \frac{3}{x}$

Gráfico: ☐

Relación: ____________

32. Proporcionalidad directa e inversa

19. Lean atentamente y resuelvan.

Pablo aprovecha los días de mucho calor para salir a vender botellas de agua mineral bien frías.

a. Completen la tabla donde se relaciona la cantidad de botellas que vende con su precio.

Cantidad de botellas de agua mineral	3	4		8	12		
Precio ($)	240		480			1 200	1 600

b. ¿Existe proporcionalidad en la situación? ¿De qué tipo? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Qué representa?

c. Escriban la fórmula de la función y representen en un sistema de ejes cartesianos.

20. Lean atentamente y resuelvan.

Los vecinos de un edificio quieren pintar las zonas de uso común.

a. Completen la tabla donde se relaciona la cantidad de pintores con las horas que tardarían en realizar el trabajo, si todos trabajan al mismo ritmo.

Cantidad de pintores	10	15		25	30		
Tiempo (horas)		200	150			60	30

b. ¿Existe proporcionalidad en la situación? ¿De qué tipo? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Qué representa?

c. Escriban la fórmula de la función y representen en un sistema de ejes cartesianos.

21. Resuelvan.

Un condimento de ensalada de 100 ml se prepara con 60 ml de aceite, 30 ml de vinagre y 10 ml de salsa de soja. ¿Cuántos mililitros de cada ingrediente se necesitan para preparar un condimento de 150 ml?

Integración

22. Unan cada razón con el valor correspondiente.

a. $\frac{5}{8}$ • 0,16

b. $\frac{28}{7}$ • 4

c. $\frac{16}{9}$ • $0,\widehat{3}$

d. $\frac{0,8}{5}$ • 0,625

e. $\frac{15}{45}$ • $1,\widehat{7}$

23. Coloquen = o ≠ según corresponda.

a. $\frac{-3}{0,5}$ ☐ $\frac{2}{-3}$

b. $\frac{-0,5}{0,3}$ ☐ $\frac{5}{3}$

c. $\frac{0,1}{0,8}$ ☐ $\frac{0,125}{0,1}$

d. $\frac{0,\widehat{2}}{1,\widehat{3}}$ ☐ $\frac{-1}{-6}$

e. $\frac{5}{-4}$ ☐ $\frac{-2,5}{-2}$

24. Resuelvan.

a. Si m + n = 300 y $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$, ¿cuál es el valor de m − n?

b. Si la razón entre dos números positivos "a" y "b" es $\frac{5}{13}$ y la diferencia entre "a" y "b" es −48, ¿cuál es el valor de b?

c. Si la razón entre dos números "x" e "y" es $\frac{1}{3}$ y su suma es 200, ¿cuáles son los números?

d. Las edades de tres personas son proporcionales a 4, 7 y 9. La suma de las edades de estas tres personas es 120. ¿Cuáles son las edades de las tres personas?

e. La suma entre la cantidad de figuritas de Zoe y Romina es igual a 175 y la razón entre las cantidades es $\frac{4}{3}$. ¿Qué cantidad de figuritas tiene cada una?

f. La diferencia entre la cantidad de materias que aprobó Juan y las que aprobó Alan el primer trimestre es 3, y su razón, $\frac{3}{2}$. Si en total tienen 11 materias, ¿cuántas materias reprobó cada uno en el primer trimestre?

25. Calculen el número que falta para que se cumpla cada proporción.

a. $\frac{0,3}{0,5} = \frac{1,5}{\square}$

b. $\frac{3}{0,2} = \frac{\square}{0,1}$

c. $\frac{0,4}{\square} = \frac{0,6}{0,25}$

d. $\frac{\square}{4,25} = \frac{3,96}{-12,75}$

26. Completen la tabla para que se cumpla la proporción $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$ e indiquen la razón en cada caso.

m	n	x	y	Razón
1,3		3,25	14,5	
0,25	0,8		1,12	
	0,03	40,5	0,15	
12,4	8		12	
$\frac{14}{5}$	7	$\frac{42}{25}$		

27. Calculen el valor de x utilizando la propiedad fundamental de las proporciones.

a. $\frac{-0,5}{x} = \frac{0,5}{-1,5}$

b. $\frac{x}{0,4 - 0,1} = \frac{1}{(0,1 + 0,3)^2}$

c. $\frac{3x - 2}{0,\widehat{1}} = \frac{2,25}{0,25}$

d. $\frac{0,2x + 0,8}{0,6} = \frac{(0,2)^{-2}}{(0,4)^{-1}}$

e. $\frac{2,25}{1,5} = \frac{3x - 1}{x + 2}$

28. Lean atentamente e indiquen cuáles son las variables de cada situación. Expliquen si existe proporcionalidad y de qué tipo.

a. La cantidad de vocales de una palabra y la cantidad de consonantes en la misma palabra.

b. La medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

c. La cantidad de trabajadores que realizan una tarea y el tiempo que tardan.

d. La distancia recorrida por un automóvil y el tiempo que emplea en recorrerla a una velocidad constante.

e. La velocidad de un auto y el tiempo empleado en recorrer una distancia determinada.

29. **Marquen con una X las tablas en las que hay proporcionalidad. Indiquen el tipo de proporcionalidad y la constante en esos casos.**

a. ☐

x	y
4	5
2	10
1	20
0,5	40

b. ☐

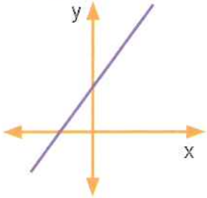
x	y
3	525
5	875
2	350
10	1 750

c. ☐

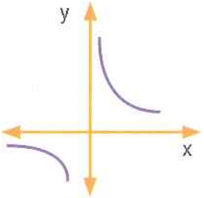
x	y
3	8
6	4
2	12
5	4,8

30. **Escriban PD (proporcionalidad directa), PI (proporcionalidad inversa) o NP (no proporcional) según corresponda.**

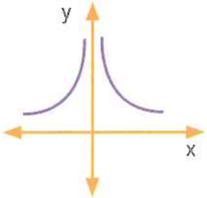
a. ☐



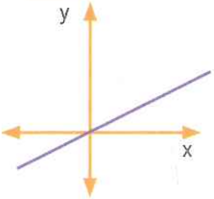
c. ☐



b. ☐



d. ☐



31. **Resuelvan.**

a. Completen la tabla sabiendo que el área del rectángulo es 54 cm².

Base	Altura	Perímetro
5 cm		
9 cm		
	12 cm	
	27 cm	

b. ¿Qué relación existe entre la base y la altura del rectángulo? ¿Es proporcional?

c. Si es una relación de proporcionalidad, indiquen de qué tipo es y cuál es la constante.

32. **Resuelvan.**

Los estudiantes de tercero salen a una excursión sorpresa. Solo saben que yendo a 60 km/h tendrán 4 horas de viaje.

a. ¿A qué distancia está el lugar de la excursión?

b. Completen la tabla que muestra la velocidad a la que pueden viajar y el tiempo empleado en cada caso. Luego, respondan.

Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
2	
4	60
	40
	30
10	

- Si la velocidad máxima permitida es 120 km/h, ¿cuánto tardarán como mínimo en llegar?
- Si la velocidad mínima permitida es 40 km/h y no se detienen, ¿cuánto tardarán como máximo en llegar?
- ¿Existe proporcionalidad? ¿De qué tipo?

c. Realicen un gráfico de la situación y escriban la expresión de la función de proporcionalidad indicando las variables del problema.

33. **Marquen con una X las opciones correctas.**

a. Una inversión de $700 000 produce una ganancia de $42 000 en un año. En el mismo tiempo y con las mismas condiciones una inversión de $450 000 producen una ganancia de:

- $25 333 ☐
- $27 000 ☐
- $65 333 ☐

b. Con 10 máquinas se confeccionan 2 400 abrigos en 24 días de trabajo. Para realizar la misma cantidad de abrigos, 12 máquinas deben trabajar:

- 12 días ☐
- 16 días ☐
- 20 días ☐

c. Un automóvil que va a 90 km/h recorre un camino de 540 km en 6 horas. Si va a 120 km/h, tardará:

- 3,5 horas ☐
- 4,5 horas ☐
- 8 horas ☐

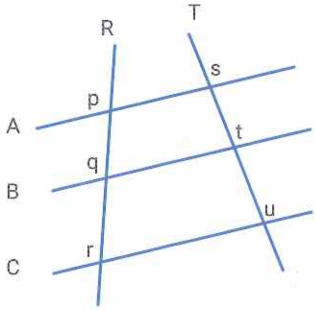
33. Teorema de Thales

▶ SABERES DINÁMICOS

El **teorema de Thales** establece que, si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra.

A // B // C
R y T son transversales

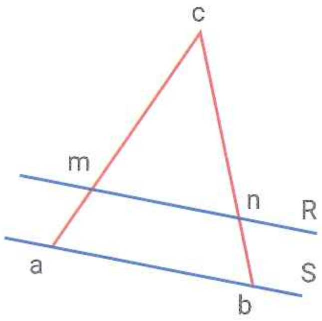
$\frac{\overline{pq}}{\overline{qr}} = \frac{\overline{st}}{\overline{tu}}$



- Al $\overline{pq}$ le corresponde el $\overline{st}$ en la otra transversal.
- Se dice que $\overline{pq}$ y $\overline{st}$ son segmentos correspondientes, al igual que $\overline{qr}$ y $\overline{tu}$.
- También se pueden considerar los **segmentos correspondientes** $\overline{pr}$ y $\overline{su}$.

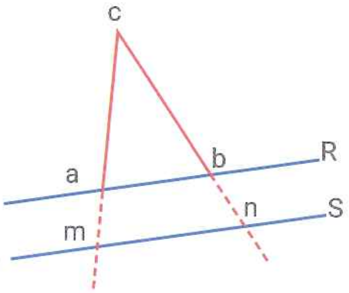
Como **consecuencia del teorema de Thales**, toda recta paralela al lado de un triángulo que interseque a los otros lados o a sus prolongaciones determina sobre éstos **segmentos proporcionales**.

R // S



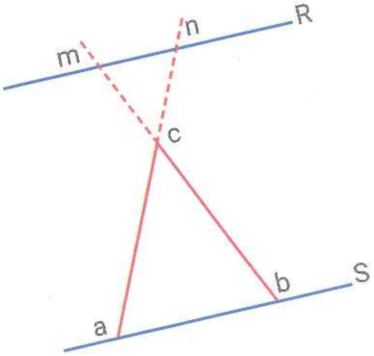
$\frac{\overline{cm}}{\overline{ma}} = \frac{\overline{cn}}{\overline{nb}}$

R // S



$\frac{\overline{ca}}{\overline{am}} = \frac{\overline{cb}}{\overline{bn}}$

R // S



$\frac{\overline{ac}}{\overline{cn}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{cm}}$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En la proporción $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{pq}}{\overline{rs}}$, $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ ¿son segmentos correspondientes?

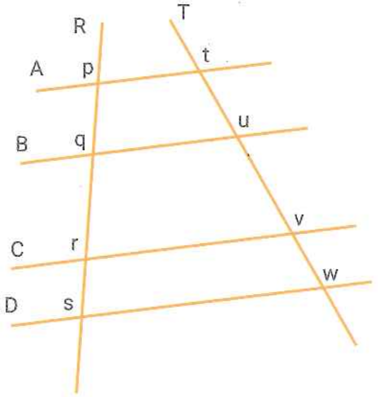
b. Cuando se cortan tres o más rectas por dos transversales, ¿siempre se cumple el teorema de Thales?

c. Al aplicar el teorema de Thales queda determinada la proporción $\frac{4{,}5 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{5{,}4 \text{ cm}}{\overline{pq}}$.

Calculen cuál es la medida de $\overline{pq}$.

33. Teorema de Thales

34. Completen con los segmentos correspondientes en cada caso.



A // B // C // D

R y T son transversales

a. $\frac{\overline{pq}}{\overline{qr}} = \frac{\square}{\overline{uv}}$

b. $\frac{\overline{qr}}{\square} = \frac{\overline{uv}}{\square}$

c. $\frac{\overline{pr}}{\square} = \frac{\square}{\overline{uw}}$

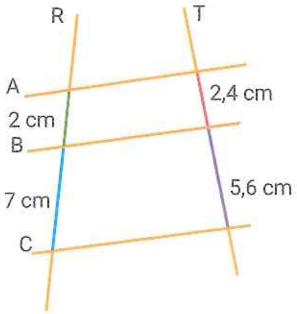
d. $\frac{\square}{\overline{pq}} = \frac{\overline{tw}}{\square}$

e. $\frac{\overline{qr}}{\overline{qs}} = \frac{\square}{\square}$

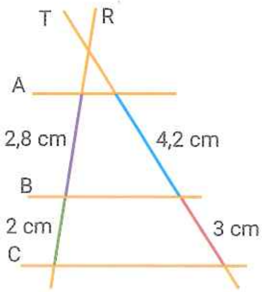
f. $\frac{\overline{rs}}{\square} = \frac{\square}{\overline{tw}}$

35. Determinen en qué casos se puede asegurar que las rectas A, B y C son paralelas.

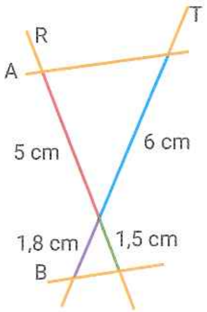
a.



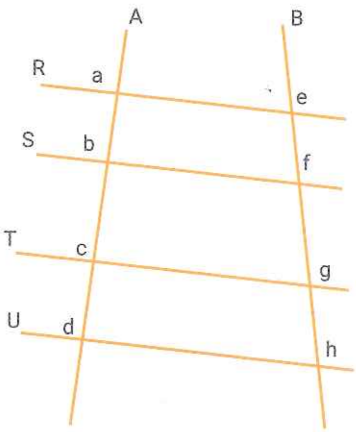
b.



c.



36. Escriban la medida del segmento pedido en cada caso.



R // S // T // U; A y B son transversales

a. $\overline{ab}$ = 2,5 cm; $\overline{cd}$ = 3,8 cm; $\overline{ef}$ = 0,75 cm; $\overline{gh}$ = ______

b. $\overline{ac}$ = 5,4 cm; $\overline{ab}$ = 1,2 cm; $\overline{ef}$ = 1,44 cm; $\overline{eg}$ = ______

c. $\overline{bc}$ = 2,5 cm; $\overline{eh}$ = 9,75 cm; $\overline{fg}$ = 3,25 cm; $\overline{ad}$ = ______

d. $\overline{bd}$ = 3,2 cm; $\overline{ac}$ = 3,6 cm; $\overline{eg}$ = 5,4 cm; $\overline{fh}$ = ______

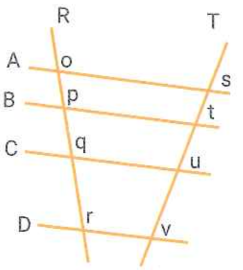
33. Teorema de Thales

37. Calculen el valor de "x" y la medida de los segmentos pedidos.

a. A // B // C // D; R y T son transversales.

$\overline{oq}$ = 2x + 1 cm; $\overline{pr}$ = x + 5 cm

$\overline{su}$ = 7 cm; $\overline{tv}$ = 5 cm

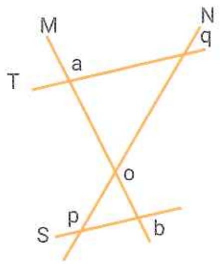


x = ; $\overline{oq}$ = ; $\overline{pr}$ =

c. T // S; M y N son transversales.

$\overline{ao}$ = x − 2 cm; $\overline{ob}$ = x − 6 cm

$\overline{qo}$ = x + 7 cm; $\overline{op}$ = x + 1 cm



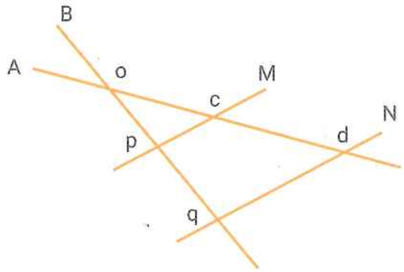
x = ; $\overline{ao}$ = ; $\overline{ob}$ = ;

$\overline{qo}$ = ; $\overline{op}$ =

b. M // N; A y B son transversales.

$\overline{od}$ = 7,5 cm; $\overline{cd}$ = 2,7 cm

$\overline{pq}$ = 2x + 2 cm; $\overline{op}$ = 4x

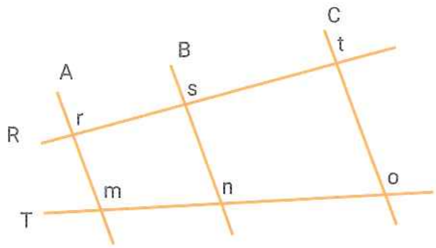


x = ; $\overline{pq}$ = ; $\overline{op}$ =

d. A // B// C; R y T transversales.

$\overline{rs}$ = 12 cm; $\overline{st}$ = 5 cm

$\overline{mn} = \frac{3}{5}x + 2$ cm; $\overline{no} = \frac{1}{6}x + 1$ cm



x = ; $\overline{mn}$ = ; $\overline{no}$ =

33. Teorema de Thales

38. Lean atentamente y resuelvan realizando un esquema de cada situación.

a. En un momento del día un edificio de 15 m de altura proyecta una sombra de 20 m. Al mismo tiempo Camila proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuánto mide Camila?

b. Un árbol proyecta una sombra de 12 m en el momento en que otro árbol que mide 2,5 m proyecta una sombra de 4 m. ¿Cuál es la altura del primer árbol?

c. La sombra que proyecta Juan es de 6 m, mientras que la de su casa es de 30 m. Si Juan mide 1,5 m, ¿cuál es la altura de la casa de Juan?

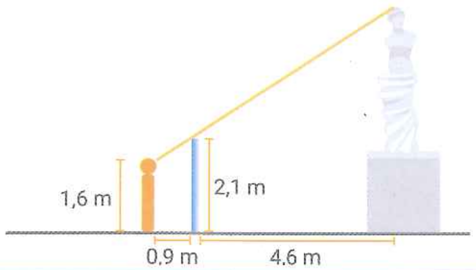
d. Escriban las indicaciones que se deben seguir para medir un mástil de una escuela que se encuentra en un espacio abierto. Luego, comparen las producciones con sus compañeros.

e. Un grupo de turistas realiza una excursión al cerro Champaquí, en Córdoba. El guía de turismo les advirtió que solo ascenderán hasta los 1 500 m para evitar efectos de la altura. Si el cerro tiene una altura aproximada sobre el nivel del mar de 3 000 m y el camino hasta la cima es de 5 200 m, ¿cuántos metros habrán recorrido los turistas sobre la ladera del cerro?

DinámicaMente

Resuelvan.

Mica está en un museo y observa un monumento como indica la figura. Según las indicaciones, puede estar como máximo a 0,9 m del vidrio de protección que mide 2,1 m y se encuentra a 4,6 m de la escultura. ¿Cuál es la altura de la escultura?

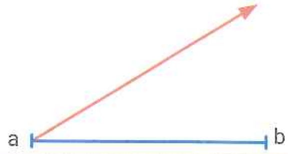


34. Aplicaciones del teorema de Thales

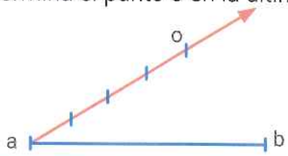
▶ SABERES DINÁMICOS

A partir del teorema de Thales, se puede **dividir un segmento** cualquiera en una cierta cantidad de partes o **segmentos congruentes**.
Por ejemplo, para dividir el segmento ab en cuatro partes congruentes, se deben seguir los siguientes pasos:

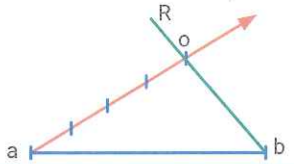
1. Se traza una semirrecta con origen en uno de los extremos del segmento (por ejemplo, en a).



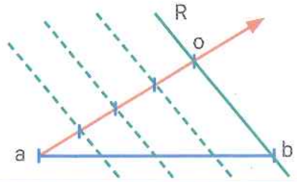
2. Se marcan sobre la semirrecta cuatro segmentos congruentes (de cualquier medida) utilizando el compás y se determina el punto o en la última marca.



3. Se traza la recta R que determina los puntos o y b.

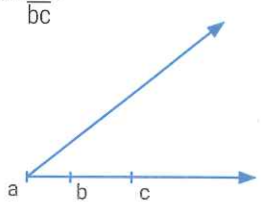


4. Se trazan rectas paralelas a R que pasen por los otros puntos que se marcaron sobre la semirrecta ao.

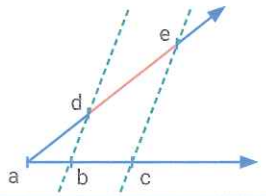


Para poder medir el cuarto proporcional, conociendo las medidas de los otros tres segmentos, se pueden seguir los siguientes pasos.
Si se considera la proporción $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}}$, el **cuarto proporcional** es $\overline{de}$.

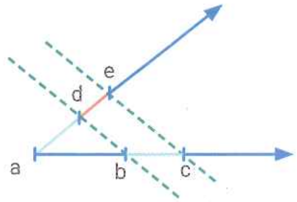
1. Se trazan dos semirrectas con origen común (por ejemplo en a). Se marcan sobre una de las semirrectas dos de los segmentos, los que forman la razón $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$.



2. Sobre la otra semirrecta se marca la medida del tercer segmento ($\overline{ad}$) a partir del origen a de la semirrecta. Se traza la recta que determinan d y b. Luego se traza la paralela que pasa por el punto c y queda determinado el punto e.



También se puede construir el **tercero proporcional** en forma similar a la construcción anterior.
Considerando la proporción $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{de}}$, siendo $\overline{bc} = \overline{ad}$.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El método explicado para dividir un segmento, ¿sirve para dividir cualquier segmento en partes congruentes?
   b. ¿Es cierto que para construir el cuarto proporcional de una proporción solo se necesita conocer la medida de tres de los segmentos?
   c. Para poder construir el tercero proporcional, ¿la medida de cuántos segmentos es necesario conocer?

34. Aplicaciones del teorema de Thales

39. Construyan los segmentos y divídanlos según lo indicado en cada caso.

a. $\overline{ab}$ = 5 cm en 3 partes congruentes.

b. $\overline{de}$ = 6 cm en 5 partes congruentes.

40. Dibujen el segmento cuarto proporcional a partir de los datos indicados en cada caso.

a. $\overline{ab}$ = 2,5 cm; $\overline{bc}$ = 3,2 cm; $\overline{ad}$ = 3 cm.

b. $\overline{mn}$ = 2,8 cm; $\overline{no}$ = 3,2 cm; $\overline{mq}$ = 2,5 cm.

41. Dibujen el segmento tercero proporcional a partir de los datos indicados en cada caso.

a. $\overline{rs}$ = 3 cm; $\overline{st}$ = 2,8 cm.

b. $\overline{ef}$ = 2,5 cm; $\overline{fg}$ = 3,5 cm.

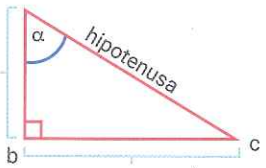
42. Reúnanse con un compañero y dividan el segmento en partes proporcionales a 2, 3 y 5.

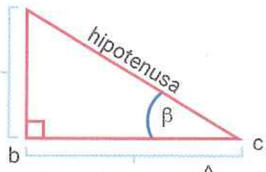
35. Razones trigonométricas

▶ SABERES DINÁMICOS

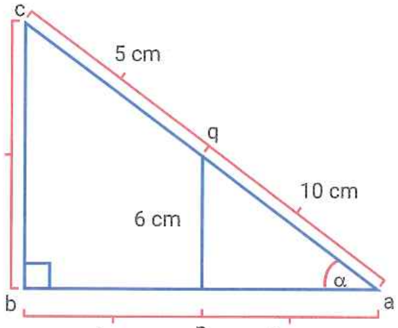
Un triángulo es rectángulo cuando uno de sus ángulos es recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa, mientras que los otros dos lados son los catetos.

Cada cateto recibe un nombre según el ángulo agudo que se considere.





Si se consideran los triángulos abc y apq, se pueden plantear las siguientes razones entre las medidas de sus lados:



En $\overset{\triangle}{abc}$ se cumplen:

$\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} = \frac{9}{15} = 0{,}6$

$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{12}{15} = 0{,}8$

$\frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = \frac{9}{12} = 0{,}75$

En $\overset{\triangle}{apq}$ se cumplen:

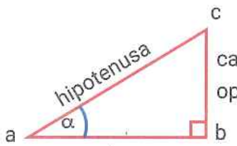
$\frac{\overline{pq}}{\overline{aq}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\frac{\overline{ap}}{\overline{aq}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\frac{\overline{pq}}{\overline{ap}} = \frac{6}{8} = 0{,}75$

Estas razones no varían al cambiar las medidas de los lados, siempre que el ángulo considerado no cambie. Por eso, las razones entre los lados de los triángulos rectángulos, llamadas **razones trigonométricas**, se definen en función de los ángulos agudos del triángulo.

En un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas fundamentales son **seno**, **coseno** y **tangente**.



Razones trigonométricas		
Seno	**Coseno**	**Tangente**
$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	$\cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ad.}}{\text{hip.}}$	$\text{tg}\ \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ad.}}$
$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$	$\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$	$\text{tg}\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$

TEST DE COMPRENSIÓN

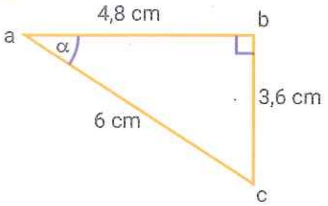
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que la tangente de un ángulo agudo se puede expresar como el cociente entre el seno y el coseno de ese ángulo?
   b. En un triángulo rectángulo, ¿cómo se puede identificar la hipotenusa? ¿Y los catetos?
   c. ¿Es posible que el resultado del seno de un ángulo sea mayor que 1? ¿Y que el resultado del coseno de un ángulo sea mayor que 1?

ACTIVIDADES

35. Razones trigonométricas

43. Identifiquen en cada uno de los siguientes triángulos el cateto opuesto y el cateto adyacente según el ángulo agudo marcado en cada figura. Luego, calculen las razones trigonométricas de ese ángulo.

a.



Cat. op.: ____

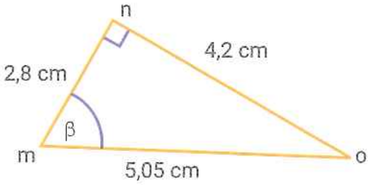
Cat. ady.: ____

$\text{sen}\ \hat{\alpha}$ = ____

$\cos \hat{\alpha}$ = ____

$\text{tg}\ \hat{\alpha}$ = ____

b.



Cat. op.: ____

Cat. ady.: ____

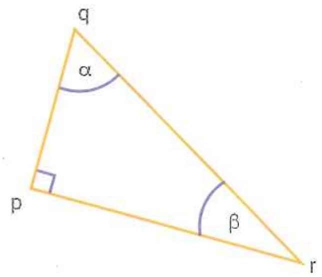
$\text{sen}\ \hat{\beta}$ = ____

$\cos \hat{\beta}$ = ____

$\text{tg}\ \hat{\beta}$ = ____

44. Completen con los lados o los ángulos según corresponda.

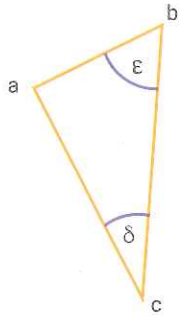
a.



$\text{sen}\ \hat{\alpha}$ = —; $\cos \hat{\alpha}$ = —; $\text{tg}\ \hat{\alpha}$ = —;

$\text{sen}\ \hat{\beta}$ = —; $\cos \hat{\beta}$ = —; $\text{tg}\ \hat{\beta}$ = —

b.

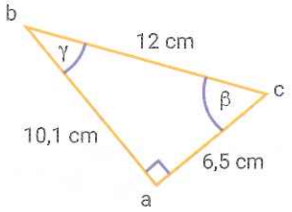


sen ____ = $\frac{\overline{ac}}{\ \ }$; cos ____ = $\frac{\overline{ab}}{\ \ }$; tg ____ = $\frac{\overline{ac}}{\ \ }$;

sen ____ = $\frac{\overline{ab}}{\ \ }$; $\cos \hat{\delta}$ = —; tg ____ = $\frac{\ \ }{\overline{ac}}$

45. Calculen las razones trigonométricas en los siguientes triángulos.

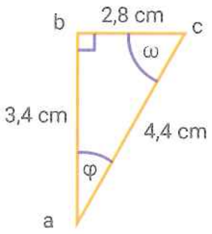
a.



$\text{sen}\ \hat{\beta}$ = ____; $\cos \hat{\beta}$ = ____; $\text{tg}\ \hat{\beta}$ = ____;

$\text{sen}\ \hat{\gamma}$ = ____; $\cos \hat{\gamma}$ = ____; $\text{tg}\ \hat{\gamma}$ = ____

b.



$\text{sen}\ \hat{\varphi}$ = ____; $\cos \hat{\varphi}$ = ____; $\text{tg}\ \hat{\varphi}$ = ____;

$\text{sen}\ \hat{\varpi}$ = ____; $\cos \hat{\varpi}$ = ____; $\text{tg}\ \hat{\varpi}$ = ____

46. Completen la tabla usando la calculadora. Luego, resuelvan.

Razón trigonométrica	Ángulo				
	0°	30°	45°	60°	90°
Seno					
Coseno					
Tangente					

a. ¿Cómo son los valores del seno y del coseno de ángulos complementarios?

b. ¿Cómo se puede calcular el valor de la tangente de cada uno de los ángulos usando los datos de la tabla? Expliquen la respuesta.

35. Razones trigonométricas

47. Completen las tablas con la medida del ángulo correspondiente, cuando sea posible, usando la calculadora.

a.

$\text{sen}\,\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}$
0	
0,5	
0,7	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
1	
1,2	

b.

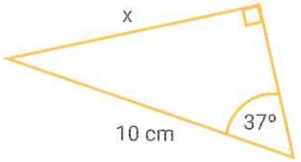
$\cos\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}$
0	
0,5	
0,7	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
1	
1,2	

c.

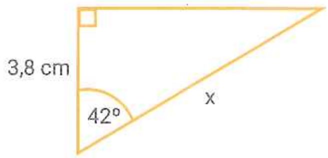
$\text{tg}\,\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}$
0	
0,5	
0,7	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
1	
1,2	

48. Hallen el valor de x en cada uno de los siguientes triángulos.

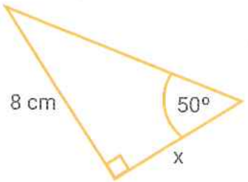
a.



b.

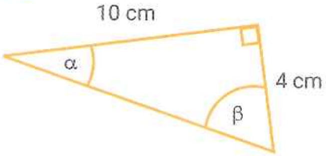


c.

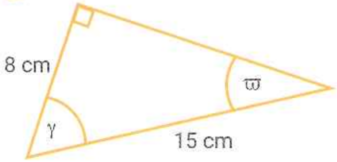


49. Calculen los valores de los ángulos agudos de los siguientes triángulos. Escriban la razón trigonométrica utilizada en cada caso.

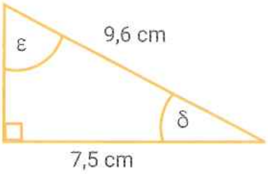
a.



b.



c.



$\hat{\alpha}$ = ______ ; $\hat{\beta}$ = ______ $\hat{\gamma}$ = ______ ; $\hat{\varpi}$ = ______ $\hat{\varepsilon}$ = ______ ; $\hat{\delta}$ = ______

50. Lean atentamente y resuelvan.

En un triángulo rectángulo el valor del seno y del coseno de uno de sus ángulos agudos es el mismo.

a. ¿Cómo clasificarían ese triángulo respecto de la medida de sus lados? ______

b. Indiquen, sin hacer cuentas, cuál es la tangente de cada uno de sus ángulos agudos. ______

35. Razones trigonométricas

51. Reúnanse en grupos y resuelvan. Luego, comparen sus respuestas con el resto de sus compañeros.

a. Si se calcula la tangente de 31° con la calculadora, el resultado es 0,6. Escriban las posibles medidas de los catetos de un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 31°? ¿Hay solo una posibilidad? Expliquen la respuesta.

b. ¿Cómo podrían calcular el valor de la tangente de 59° usando los datos del ítem anterior?

52. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas en sus carpetas.

a. Si en un triángulo rectángulo la tangente de uno de los ángulos agudos es igual a 1, entonces el triángulo es isósceles. ☐

b. En todo triángulo rectángulo se cumple que el valor del coseno de uno de los ángulos agudos coincide con el valor del seno del otro ángulo agudo. ☐

c. El valor de la tangente de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre es menor que 1. ☐

d. En todo triángulo rectángulo el valor del seno de uno de los ángulos agudos siempre es menor que 1. ☐

e. En todo triángulo se cumplen las razones trigonométricas y es válido el teorema de Pitágoras. ☐

53. Indiquen si pueden existir triángulos rectángulos que cumplan con las condiciones dadas en cada caso. Expliquen las respuestas.

a. $\text{sen}\ \hat{\alpha} = 0{,}5$; $\cos \hat{\alpha} = 0{,}7$

b. $\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \hat{\alpha} = \frac{1}{2}$

c. $\text{sen}\ \hat{\alpha} = 1{,}2$; $\cos \hat{\alpha} = 0{,}8$

d. $\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

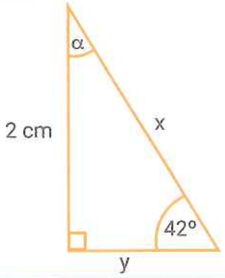
DinámicaMente

Calculen el valor del ángulo α y las medidas de los lados x e y.

$\hat{\alpha}$ = ☐

x = ☐

y = ☐

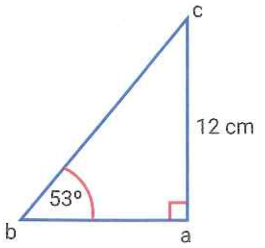


36. Resolución de triángulos rectángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar las medidas de los tres lados y de los ángulos agudos a partir de ciertos datos. Para ello se pueden usar las propiedades del teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y la suma de ángulos interiores de un triángulo.

A partir de los datos de la figura se pueden calcular el ángulo agudo ($\hat{c}$) y los lados ($\overline{ab}$ y $\overline{bc}$) desconocidos del triángulo.



$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$, entonces $\hat{c} = 37°$

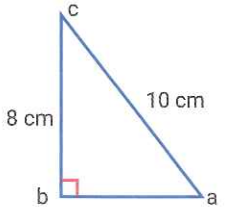
$$\text{sen } 53° = \frac{12 \text{ cm}}{\overline{bc}} \qquad \text{tg } 53° = \frac{12 \text{ cm}}{\overline{ab}}$$

$$\overline{bc} = \frac{12 \text{ cm}}{\text{sen } 53°} \qquad \overline{ab} = \frac{12 \text{ cm}}{\text{tg } 53°}$$

$$\overline{bc} = \frac{12 \text{ cm}}{0{,}8} \qquad \overline{ab} = \frac{12 \text{ cm}}{1{,}33}$$

$$\overline{bc} = 15 \text{ cm} \qquad \overline{ab} = 9 \text{ cm}$$

A partir de los datos se pueden averiguar el cateto ($\overline{ab}$) y los ángulos agudos ($\hat{a}$ y $\hat{c}$).



$$\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2$$
$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{bc}^2$$
$$\overline{ab}^2 = (10 \text{ cm})^2 - (8 \text{ cm})^2$$
$$\overline{ab}^2 = 36 \text{ cm}^2$$
$$\overline{ab} = \sqrt{36 \text{ cm}^2}$$
$$\overline{ab} = 6 \text{ cm}$$

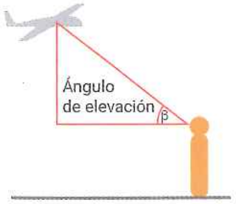
$$\text{sen } \hat{a} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}$$
$$\hat{a} = \text{arc sen } 0{,}8$$
$$\hat{a} = 53°\, 7'\, 48''$$
Como $\hat{a} + \hat{c} = 90°$,
$$\hat{c} = 36°\, 52'\, 12''$$

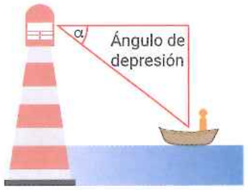
Para poder resolver un triángulo rectángulo siempre es conveniente trabajar con las medidas que figuran en los datos del problema.

Ángulo de elevación y ángulo de depresión

Cuando se deben hacer mediciones relacionadas con objetos que se encuentran a diferentes alturas respecto al punto de la medición, es necesario recurrir a los **ángulos de elevación** o **de depresión**.

- El ángulo formado por la línea horizontal y la línea de la visual a un objeto que se encuentra por encima de la línea del horizonte se denomina **ángulo de elevación**.
- El ángulo formado por la línea horizontal y la línea de la visual que se encuentra por debajo de la línea del horizonte se llama **ángulo de depresión**.





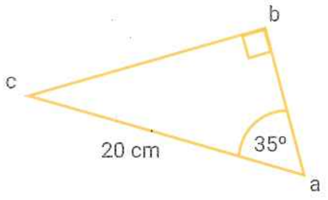
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si en un triángulo rectángulo se conocen solo las medidas de los tres ángulos, ¿se puede calcular cuáles son las medidas de sus lados?
   b. Si en un triángulo rectángulo se conoce la medida de un ángulo agudo y el cateto adyacente a él, ¿qué razón trigonométrica se puede utilizar para hallar la medida del cateto opuesto? ¿Y para hallar la hipotenusa?
   c. Si en un triángulo rectángulo se conoce la medida de sus catetos, ¿qué razón trigonométrica se puede utilizar para hallar la medida de uno de sus ángulos agudos? ¿Cómo averiguarían la medida del otro ángulo agudo?

36. Resolución de triángulos rectángulos

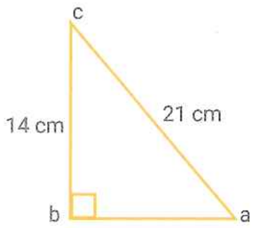
54. Resuelvan los siguientes triángulos rectángulos y escriban lo pedido en cada caso.

a.



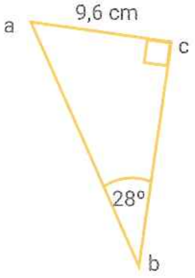
$\hat{c}$ = ______ ; $\overline{ab}$ = ______ ; $\overline{bc}$ = ______

c.



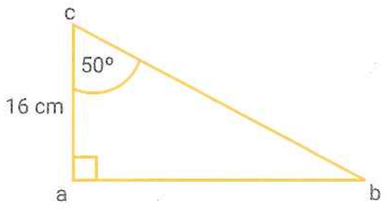
$\hat{a}$ = ______ ; $\hat{c}$ = ______ ; $\overline{ab}$ = ______

b.



$\hat{a}$ = ______ ; $\overline{ab}$ = ______ ; $\overline{bc}$ = ______

d.



$\hat{b}$ = ______ ; $\overline{ab}$ = ______ ; $\overline{bc}$ = ______

55. Lean atentamente, realicen un esquema de la situación y resuelvan.

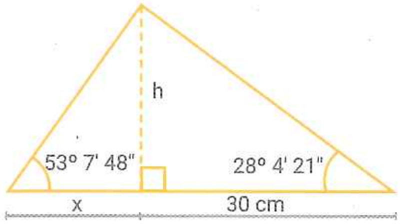
a. Calculen la altura que se podrá alcanzar con una escalera de 3 m de longitud apoyada sobre una pared, si esta forma con el piso un ángulo de 53°.

b. Juan está ubicado a 100 m del pie de una torre y desde allí observa su punto más alto con un ángulo de elevación de 60°. Si Juan mide 1,5 m, ¿cuál es la altura de la torre?

36. Resolución de triángulos rectángulos

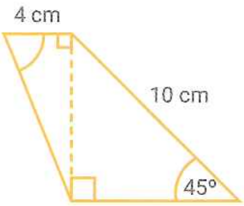
56. Calculen el perímetro y el área de cada una de las siguientes figuras.

a.



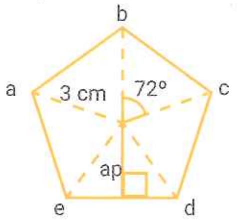
Perímetro = ; área =

c.



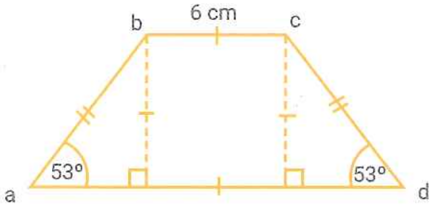
Perímetro = ; área =

b. Pentágono regular.



Perímetro = ; área =

d.



Perímetro = ; área =

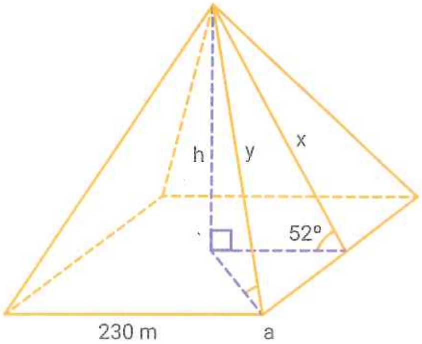
57. Lean atentamente y resuelvan.

En la pirámide de Keops de base cuadrada, el lado de la base mide 230 m y el ángulo que forma una cara con la base es de 52°. Calculen.

a. La altura de la pirámide (h), la altura de cara (x) y la arista (y).

b. El ángulo $(\hat{a})$ que forma la arista con la base.

c. El área total de la pirámide.



36. Resolución de triángulos rectángulos

58. Resuelvan con un compañero. Pueden realizar un esquema de la situación.

a. Desde lo alto de un faro de 30 m de altura, un cuidador divisa un barco con un ángulo de depresión de 37°. Si las embarcaciones pueden acercarse como máximo a 15 m del faro por existir una formación rocosa, ¿cuántos metros más puede navegar el barco dirigiéndose hacia el faro?

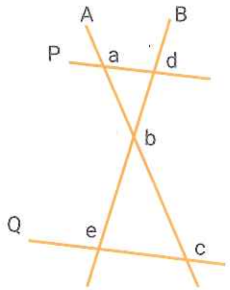
b. Se fijó un poste de 3,5 m de altura con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el extremo superior del poste con un ángulo de elevación de 40°. ¿A qué distancia del pie del poste se sujetó el cable en el suelo? ¿Cuál es la longitud del cable?

c. Desde el suelo se puede ver el punto más alto de un edificio con un ángulo de elevación de 60°. Al alejarse 6 metros en línea recta del edificio, el ángulo con el que se observa el punto más alto es de 50°. ¿Cuál es la altura del edificio?

d. Pablo y Matías miden 1 m de estatura cada uno y están ubicados en lados opuestos de un árbol. Pablo observa la parte más alta del árbol con un ángulo de elevación de 45° y Matías, con un ángulo de elevación de 35°. Si entre ellos hay una distancia de 7,5 m, ¿qué altura tiene el árbol? ¿A qué distancia del árbol está cada uno?

59. **Determinen el valor de x y el de los segmentos pedidos en cada caso.**

a. Datos: P // Q; $\overline{ab}$ = 2 cm; $\overline{bc}$ = 5 cm; $\overline{bd}$ = 2x − 2,4 cm; $\overline{be}$ = 7,5 cm − x

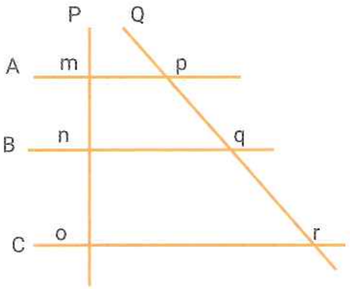


x =

$\overline{bd}$ =

$\overline{be}$ =

b. Datos: A // B // C; $\overline{mn}$ = x − 1 cm; $\overline{no}$ = x + 1 cm; $\overline{pq}$ = x + 3 cm; $\overline{qr}$ = x + 6 cm



x =

$\overline{mn}$ =

$\overline{no}$ =

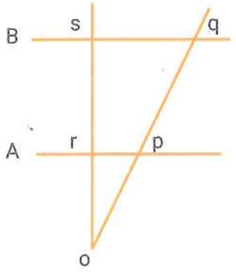
$\overline{pq}$ =

$\overline{qr}$ =

60. **Lean atentamente y resuelvan.**

Cande dice que las rectas A y B son paralelas. Lola dice que para que A y B sean paralelas el segmento pq debe medir 3,84 cm y no 3,66 cm. ¿Quién tiene razón? Expliquen la respuesta.

Datos: A // B; $\overline{or}$ = 2 cm; $\overline{rs}$ = 3 cm; $\overline{op}$ = 2,56 cm; $\overline{pq}$ = 3,66 cm



61. **Dibujen un segmento en sus carpetas y divídanlo en 5 partes iguales. Expliquen los pasos que siguieron para su construcción.**

62. **Dibujen un segmento y divídanlo en dos partes cuya razón sea un tercio.**

63. **Obtengan el cuarto proporcional, analítica y gráficamente en cada caso.**

a. $\overline{ab}$ = 4 cm; $\overline{bc}$ = 5,5 cm; $\overline{ad}$ = 3 cm.

b. $\overline{pq}$ = 6 cm; $\overline{qr}$ = 2,4 cm; $\overline{ps}$ = 8 cm.

c. $\overline{kl}$ = 3,5 cm; $\overline{lm}$ = 2,5 cm; $\overline{kn}$ = 5 cm.

64. **Obtengan el tercero proporcional, analítica y gráficamente en cada caso.**

a. $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{bc}$ = 8 cm.

b. $\overline{mn}$ = 2,5 cm; $\overline{no}$ = 7 cm.

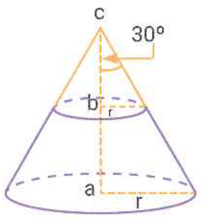
c. $\overline{rs}$ = 3,4 cm; $\overline{st}$ = 8,2 cm.

65. **Resuelvan.**

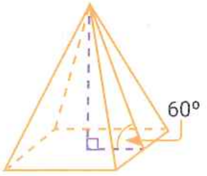
El punto q divide al segmento $\overline{pr}$ en la razón $\frac{2}{3}$. Si $\overline{qr}$ mide 20 cm, ¿cuánto debe medir pr?

66. **Calculen el volumen del cono truncado de la imagen (que tiene líneas violetas).**

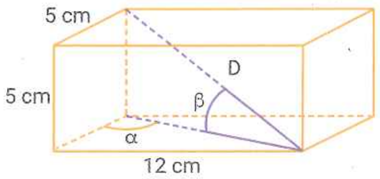
Datos: $\overline{ab}$ = 4 cm; $\overline{bc}$ = 3 cm



67. **Tengan en cuenta que el lado de la base cuadrada de la pirámide mide 4 cm y calculen su área total.**



68. **Calculen los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ y la diagonal D del prisma de base cuadrada.**



$\hat{\alpha}$ =

$\hat{\beta}$ =

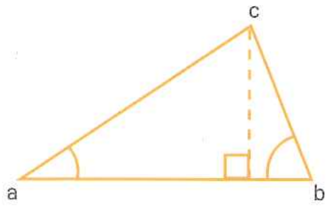
D =

69. **Completen la tabla.**

$\hat{\alpha}$	sen $\hat{\alpha}$	cos $\hat{\alpha}$	tg $\hat{\alpha}$
37°			
	0,87		
			1
		0,31	

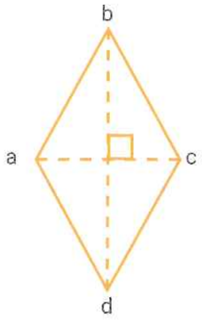
70. **Tengan en cuenta los datos y calculen lo pedido en cada caso.**

a. $\hat{a}$ = 44° 30'; $\hat{b}$ = 65° 25' 12"; $\overline{bc}$ = 9,7 cm



Área = ; Perímetro =

b. abcd es rombo; $\overline{bd}$ = 19,6; $\overline{ac}$ = 12,8 cm



Perímetro =

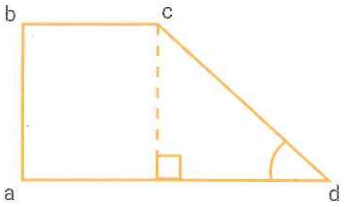
$\hat{a}$ =

$\hat{b}$ =

$\hat{c}$ =

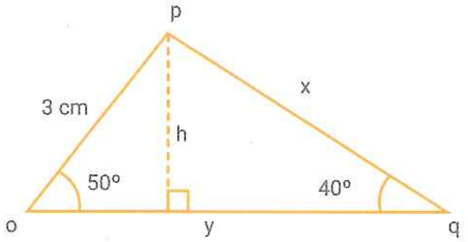
$\hat{d}$ =

c. $\overline{bc}$ = 32,4 cm; $\overline{ad}$ = 74,8 cm; $\hat{d}$ = 36° 28' 51"



Área = ; Perímetro =

71. **Calculen los valores de "x", "y" y "h" en el siguiente triángulo.**



x = ; y = ; h =

72. **Planteen y resuelvan.**

a. ¿Cuánto miden los ángulos que forman las diagonales de un rectángulo si sus lados miden 6 cm y 8 cm, respectivamente?

b. ¿Cuánto miden los lados congruentes de un triángulo isósceles si su base es de 4,2 cm y el ángulo que forman entre ellos es de 38°?

73. **Planteen y resuelvan. Pueden realizar un esquema de cada situación.**

a. Un árbol proyecta una determinada sombra en un momento del día. El ángulo entre la sombra y los rayos del sol es de 50°. ¿Cuál será ese ángulo cuando la sombra del árbol proyecte una sombra igual al doble que la anterior?

b. Desde la terraza de un edificio de 40 m de altura Nadia observa una piscina que se encuentra a 90 m del pie del edificio. ¿Cuál es el ángulo de depresión con el que observa Nadia la piscina?

c. Una escalera de 5 m se apoya en una pared, formando un ángulo de 54° con el piso. ¿A qué distancia de la pared se ubica el pie de la escalera? ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

d. Carolina observa el extremo superior de una torre de 36,5 m de altura con un ángulo de elevación de 64°. Si Carolina mide 1,5 m, ¿a qué distancia del pie de la torre se encuentra?

6 Congruencia y semejanza

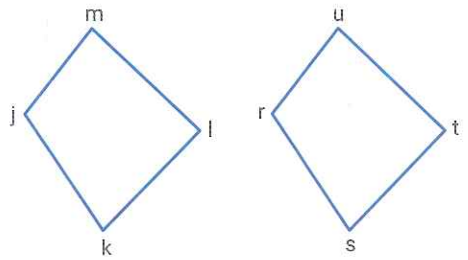
37. Congruencia y semejanza

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos polígonos son **congruentes** cuando al superponerlos coinciden en todos sus puntos.
Los polígonos congruentes tienen todos sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

TIP

$\cong$ significa "es congruente con"

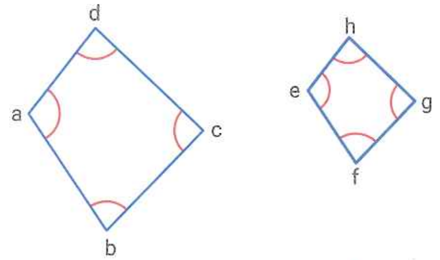


$\overline{jk} \cong \overline{rs}$ $\overline{kl} \cong \overline{st}$ $\overline{lm} \cong \overline{tu}$ $\overline{mj} \cong \overline{ur}$

$\hat{j} \cong \hat{r}$ $\hat{k} \cong \hat{s}$ $\hat{l} \cong \hat{t}$ $\hat{m} \cong \hat{u}$

jklm $\cong$ rstu

Dos polígonos son **semejantes** cuando sus lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos, congruentes.



abcd ~ efgh

$\hat{a} \cong \hat{e}$ $\hat{b} \cong \hat{f}$ $\hat{c} \cong \hat{g}$ $\hat{d} \cong \hat{h}$

$\frac{\overline{ab}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{gh}} = \frac{\overline{da}}{\overline{he}}$ ← **Razón de semejanza**

Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]
El mapa planisferio rectangular es una representación plana de la Tierra, que no es fiel a la realidad. Esto se debe a que los polos se extienden en el mapa para lograr la forma rectangular (no hay semejanza en los polos). Pueden visitar el siguiente enlace para comparar los tamaños reales, por ejemplo de la Argentina y Groenlandia.
https://thetruesize.com

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/consem* para mirar un video donde se muestra la diferencia entre la congruencia y la semejanza.

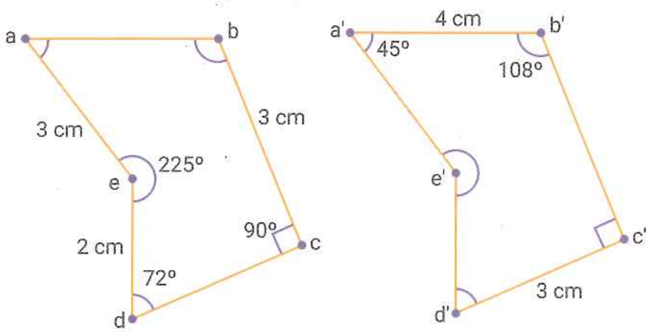
* Enlace acortado de https://youtu.be/UgZiDr1gSxc

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Dos figuras congruentes ¿pueden tener lados con las mismas medidas, pero ángulos con diferentes medidas?
   b. Si dos figuras son congruentes, ¿cuál es la razón de semejanza entre la medida de los lados correspondientes?
   c. La razón de semejanza entre los lados correspondientes de dos figuras es 2. Si los ángulos de la figura más grande son $\hat{a} = 140°$; $\hat{b} = 60°$; $\hat{c} = 60°$ y $\hat{d} = 100°$, ¿cuáles son las medidas de los ángulos $\hat{a}'$; $\hat{b}'$; $\hat{c}'$ y $\hat{d}'$?

37. Congruencia y semejanza

1. Completen con las medidas que faltan sabiendo que las figuras son congruentes.



$\overline{ab}$ = ____ $\hat{a}$ = ____

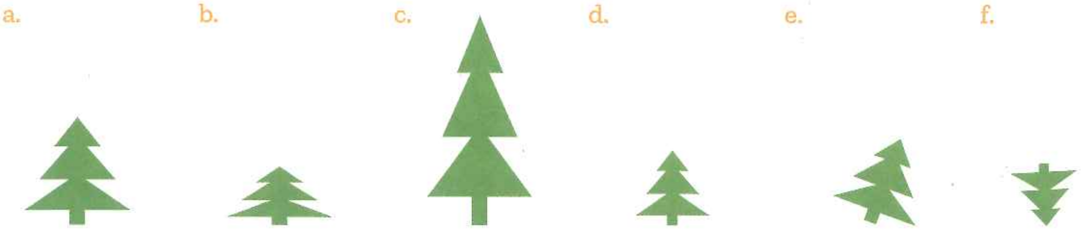
$\overline{b'c'}$ = ____ $\hat{b}$ = ____

$\overline{cd}$ = ____ $\hat{c'}$ = ____

$\overline{d'e'}$ = ____ $\hat{d'}$ = ____

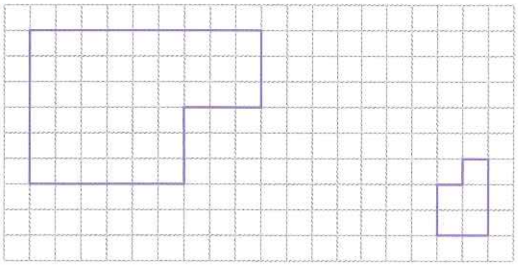
$\hat{e'}$ = ____

2. Indiquen cuáles de las siguientes figuras son semejantes.

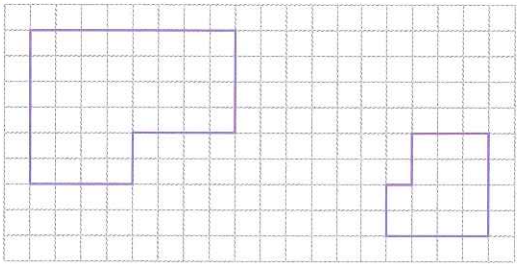


3. Indiquen si los siguientes pares de figuras son semejantes. Expliquen sus respuestas.

a.



b.

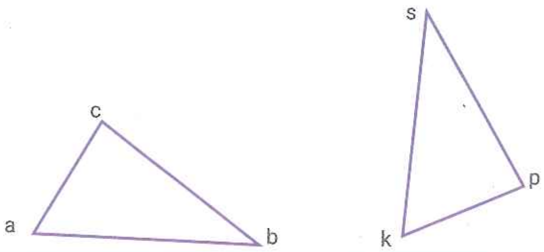


DinámicaMente

Estos triángulos son semejantes.

Se sabe que $\hat{a} \cong \hat{k}$, $\hat{b} \cong \hat{s}$, $\hat{c} \cong \hat{p}$.

¿Cuáles son los lados que se corresponden en la misma proporción?



38. Congruencia de triángulos y de polígonos

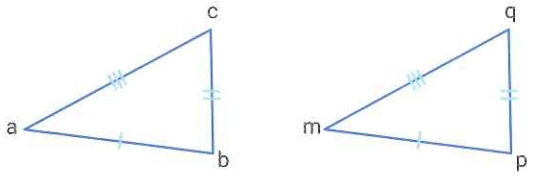
▶ SABERES DINÁMICOS

Criterios de congruencia de triángulos

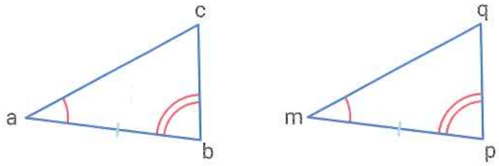
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres ángulos y sus tres lados respectivamente congruentes.

Criterios de congruencia de triángulos

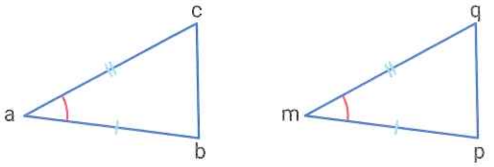
Dos triángulos son congruentes cuando tienen los tres lados respectivamente congruentes (LLL).



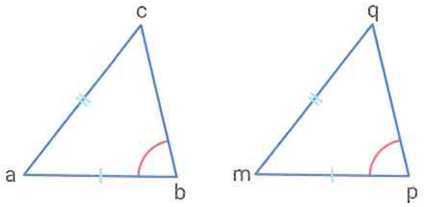
Dos triángulos son congruentes cuando tienen un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado respectivamente congruentes (ALA).



Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (LAL).



Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente congruentes (LLA).



Criterios de congruencia de polígonos

Dos polígonos son congruentes si tienen sus lados correspondientes y sus ángulos interiores correspondientes respectivamente congruentes.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/cpoli* para aprender más acerca de congruencia de polígonos.

* Enlace acortado de https://pruebat.org/SaberMas/MiClase/inicia/9610/061e1581a5228bb068f-12477c41088ee/141193/5-105

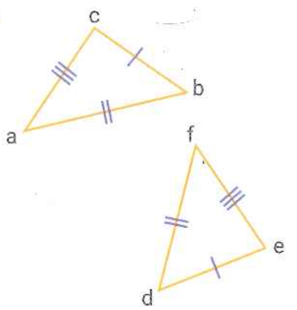
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si se traza la diagonal de un rectángulo, ¿quedan determinados dos triángulos congruentes?
   b. Si dos polígonos son, cada uno de ellos, congruentes con un tercero, ¿son congruentes entre sí?
   c. Al trazar la altura de un triángulo equilátero quedan determinados dos triángulos congruentes. Elijan un criterio que sirva para demostrarlo y dibujen un ejemplo en el que indiquen los lados y los ángulos a los que se hace referencia con ese criterio.

38. Congruencia de triángulos y de polígonos

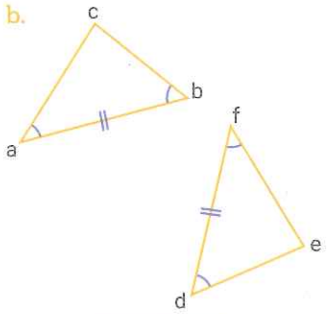
4. Indiquen qué criterio determina que los siguientes triángulos sean congruentes.

a.



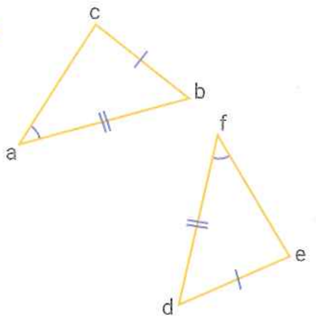
Criterio:

b.



Criterio:

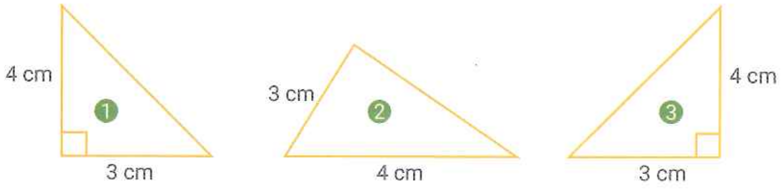
c.



Criterio:

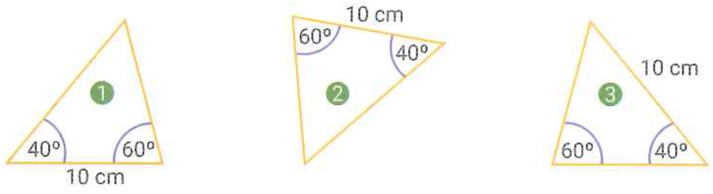
5. Rodeen con color los números de los triángulos congruentes de cada grupo e identifiquen el criterio de congruencia involucrado en cada caso.

a.



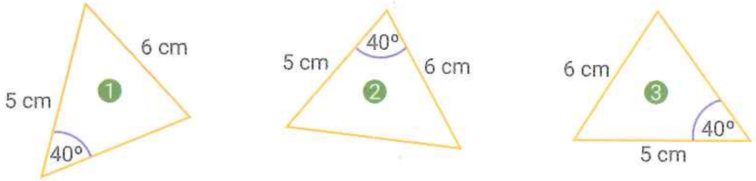
Criterio:

b.



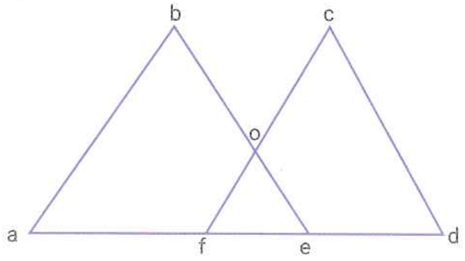
Criterio:

c.



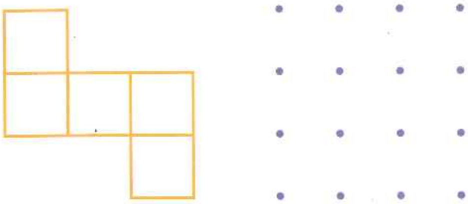
Criterio:

6. Diseñen en sus carpetas una figura congruente con la siguiente y escriban cómo lo hicieron. Luego, compartan la explicación con sus compañeros.

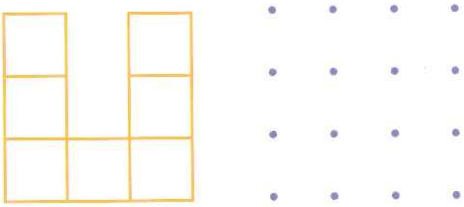


7. Construyan una figura congruente a la dada, pero en una posición distinta a la de la imagen.

a.

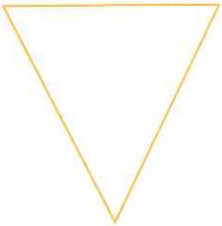


b.

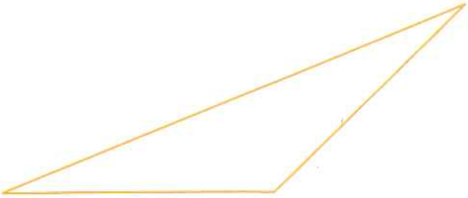


8. Construyan en cada caso un triángulo semejante al dado.

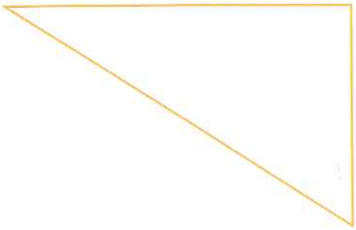
a.



b.

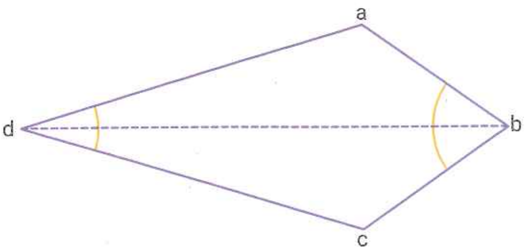


c.



9. Tengan en cuenta los datos y demuestren que $\overline{ab} \cong \overline{bc}$, $\overline{ad} \cong \overline{cd}$ y que abcd es un romboide.

$\overline{bd}$ está contenido en la bisectriz de los ángulos $\hat{b}$ y $\hat{d}$.



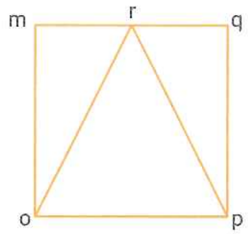
38. Congruencia de triángulos y de polígonos

10. Tengan en cuenta los datos y demuestren por qué los triángulos mro y rqp son congruentes.

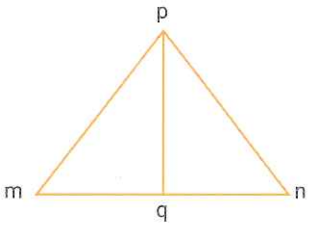
mopq es un cuadrado.

"r" es el punto medio de $\overline{mq}$

$\overline{or} \cong \overline{rp}$

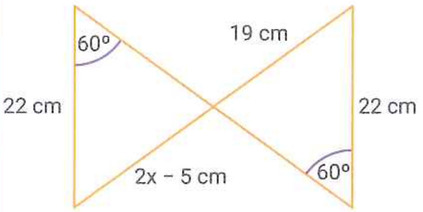


11. Tengan en cuenta que mpq y npq son congruentes y completen con los lados y los ángulos congruentes de estos dos triángulos.



Lados			Ángulos		
	≅			≅	
	≅			≅	
	≅			≅	

12. Calculen el valor de x, sabiendo que los triángulos son congruentes.



DinámicaMente

Dos barcos se encuentran del mismo lado de la orilla de un río a una distancia de 4 km uno del otro.

El primer barco sale formando un ángulo recto con la orilla y recorre 6 km para llegar hasta la otra orilla (las orillas son paralelas).

A mitad de camino, deja caer una boya para que la recoja el otro barco. El segundo barco se dirige a la otra orilla en línea recta de manera tal de pasar a recoger la boya. La boya la recoge luego de recorrer 5 km.

a. ¿Qué distancia total recorre el segundo barco al atravesar el río?

b. ¿A qué distancia del primer barco se encontrará el segundo barco luego de que los dos lleguen a la otra orilla?

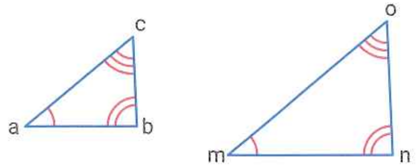
39. Semejanza de triángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son **semejantes** cuando los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos, congruentes.

$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{mno}$

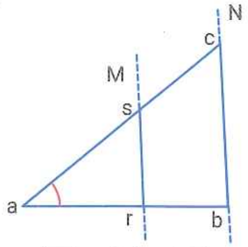
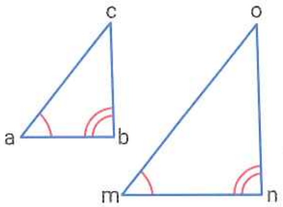
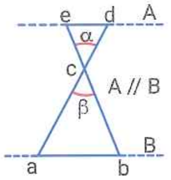


En los triángulos semejantes, los lados correspondientes se oponen a ángulos congruentes.

$\hat{a} \cong \hat{m}$ entonces $\overline{bc}$ se corresponde con $\overline{no}$.
$\hat{b} \cong \hat{n}$ entonces $\overline{ac}$ se corresponde con $\overline{mo}$.
$\hat{c} \cong \hat{o}$ entonces $\overline{ab}$ se corresponde con $\overline{mn}$.

$\dfrac{\overline{ab}}{\overline{mn}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{mo}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{no}}$ $\quad \hat{a} \cong \hat{m} \quad \hat{b} \cong \hat{n} \quad \hat{c} \cong \hat{o}$

La constante que se obtiene al dividir las medidas de los lados correspondientes se denomina **razón de semejanza**.

Criterios de semejanza de triángulos		
Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales (LLL). M // N  $\dfrac{\overline{ac}}{\overline{as}} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ar}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{rs}}$ $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{ars}$	Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes (AA).  $\hat{a} \cong \hat{m} \quad \hat{b} \cong \hat{n}$ $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{mno}$	Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos, congruente (LAL).  $\dfrac{\overline{ec}}{\overline{cb}} = \dfrac{\overline{cd}}{\overline{ca}} \quad \hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$ $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{cde}$

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/semfi* y miren el video hasta el minuto 2:25 para aprender más acerca de semejanza de figuras.

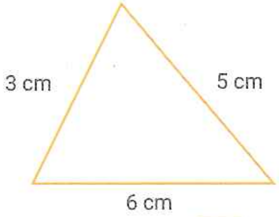
* Enlace acortado de https://www.educ.ar/recursos/50788/homotecia-y-semejanza

TEST DE COMPRENSIÓN

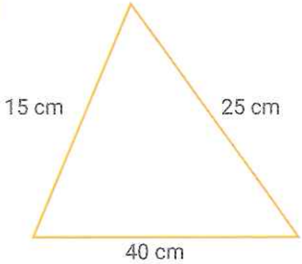
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Los triángulos abc y def son semejantes, $\overline{ab}$ = 6 cm; $\overline{ac}$ = 7 cm; $\overline{bc}$ = 10 cm; $\overline{de}$ = 9 cm; $\overline{df}$ = 10,5 cm; $\overline{ef}$ = 15 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Qué criterio se puede utilizar para demostrar la semejanza?
   b. La base y la altura de un triángulo miden el doble que las de otro triángulo. ¿Se puede afirmar que se trata de triángulos semejantes?
   c. Dibujen un triángulo equilátero de 3 cm de lado. Dibujen otro triángulo semejante cuya razón de semejanza con el anterior sea 2. ¿Es cierto que todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí?

39. Semejanza de triángulos

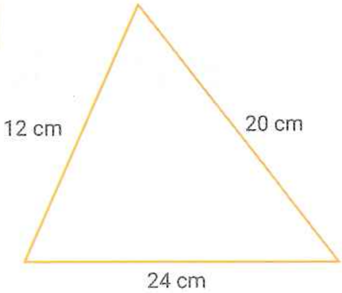
13. Marquen con una X los triángulos que son semejantes al dado.



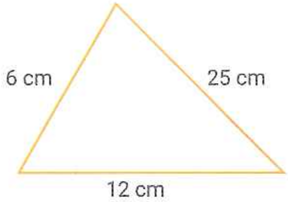
a. ☐



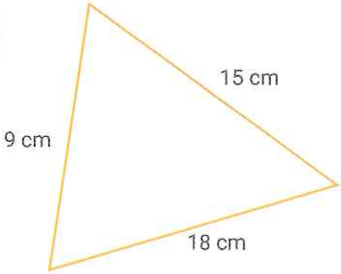
b. ☐



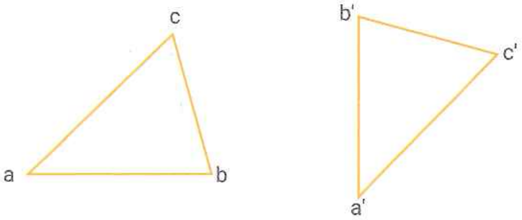
c. ☐



d. ☐



14. Indiquen, según los datos que se dan en cada caso, si se puede asegurar que los triángulos abc y a'b'c' son semejantes. Expliquen las respuestas.



a. $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}}; \hat{c} \cong \hat{c'}$

b. $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}}; \hat{a} \cong \hat{a'}$

c. $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}}; \hat{b} \cong \hat{b'}$

d. $\hat{a} \cong \hat{a'}; \hat{b} \cong \hat{b'}$

15. Tengan en cuenta el gráfico y los datos y calculen la distancia entre las ciudades "a" y "b".

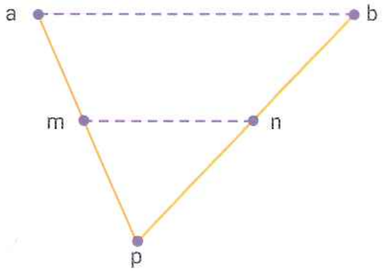
En el gráfico, cada punto representa a una ciudad.

$\overline{ab} \parallel \overline{mn}$

$\overline{ap} = 30$ km

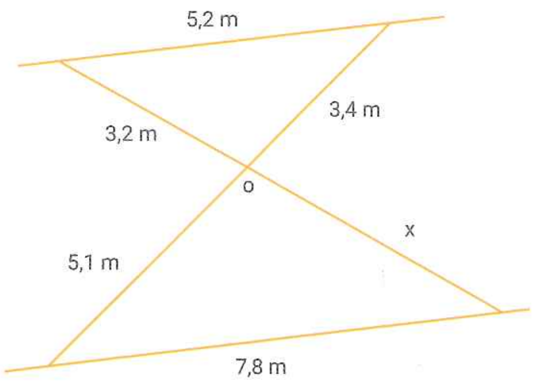
$\overline{mp} = 17$ km

$\overline{mn} = 24$ km



16. Lean atentamente y resuelvan.

Dos caminos paralelos se unen entre sí por dos pasarelas, que a su vez se cortan en el punto "o", como indica la siguiente figura. Calculen la longitud de la pasarela más corta.



DinámicaMente

Lean atentamente y resuelvan.

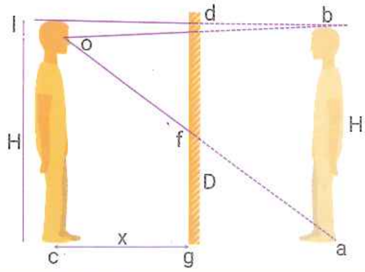
"Para poder verse completo en un espejo, su tamaño debe ser la mitad de la persona que lo mira, independientemente de la distancia a la que se coloque".

En la figura se esquematiza una persona, su imagen y el espejo plano.

"x" es la distancia del espejo a la persona y "H" es la distancia de los ojos al suelo.

Se puede observar por semejanza que $\frac{H}{D} = \frac{2x}{x}$, o sea, H = 2D.

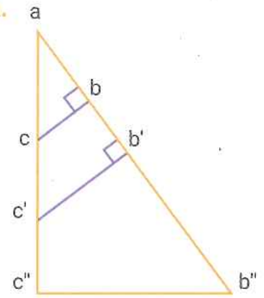
Calculen cuál será el espejo más pequeño en el que pueden verse ustedes.



39. Semejanza de triángulos

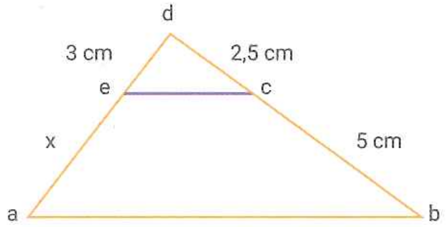
17. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a.



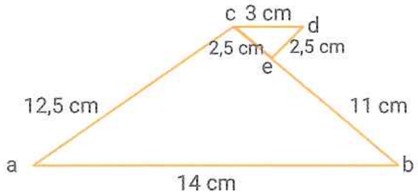
Los triángulos abc, ab'c' y ab"c" no son semejantes. ☐

b. $\overline{ab} // \overline{ce}$



El valor de x es 6 cm. ☐

c. $\overline{ab} // \overline{cd}$ y $\overline{ac} // \overline{de}$



El triángulo abc es semejante al triángulo cde. ☐

18. Reúnanse en grupos y resuelvan.

a. Marquen un par de triángulos semejantes en cada imagen e indiquen el criterio utilizado en cada caso.

b. Investiguen al menos tres obras de cada uno de estos artistas: Wassily Kandinsky, Eduardo Chillida y Joan Miró, en las que se destaquen triángulos semejantes. Luego, elaboren en la carpeta una ficha técnica para cada pintura en la que consten los siguientes datos: autor, título, características y ubicación de la obra. Pueden crear una presentación con las imágenes obtenidas y las fichas elaboradas.

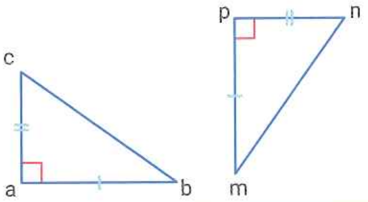
40. Congruencia y semejanza de triángulos rectángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

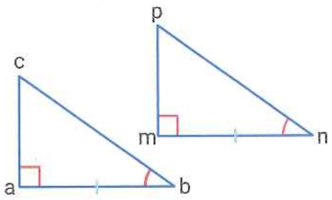
Todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto, por lo tanto los criterios de congruencia y de semejanza de ellos requieren condiciones particulares.

Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes.

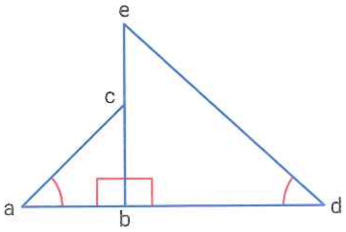


Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y el ángulo agudo correspondiente respectivamente congruentes.



Criterios de semejanza de triángulos rectángulos

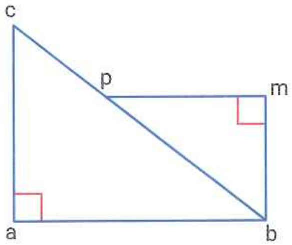
Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo congruente.



$$\hat{a} \cong \hat{d}$$

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{bde}$$

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos pares de lados proporcionales (hipotenusa con hipotenusa y catetos con catetos).



$$\frac{\overline{ac}}{\overline{mb}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{mp}}$$

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{bmp}$$

Áreas dinámicas [Matemática e Historia]

Según la leyenda de Plutarco, el famoso matemático Tales visitó las pirámides de Egipto, y admirado por los imponentes monumentos, quiso saber su altura. Clavó una vara en la arena y dedujo, a través de la semejanza de triángulos, que la razón entre la sombra de la pirámide y la sombra de la vara, es la misma que la razón entre la altura de la pirámide y la altura de la vara. Este método es muy útil, ya que permite averiguar la altura de cualquier objeto grande, sin necesidad de medirlo directamente. Pueden visitar la página www.geogebra.org/m/ZqngBVbD para ver un ejemplo.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/semtr* y miren el video para aprender más acerca de los criterios de semejanza de triángulos rectángulos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/pL5SAbOKcBO

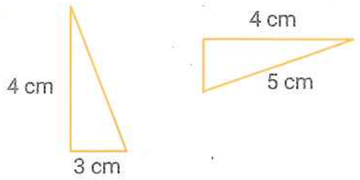
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un triángulo rectángulo ¿puede ser semejante a un triángulo isósceles?
   b. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm. ¿Cuánto miden los catetos de otro triángulo rectángulo semejante cuya hipotenusa mide 26 cm? ¿Cuál es la razón de semejanza?
   c. Si se traza una altura en un triángulo equilátero quedan determinados dos triángulos rectángulos. ¿Qué criterio utilizarían para demostrar que los dos triángulos rectángulos son congruentes?

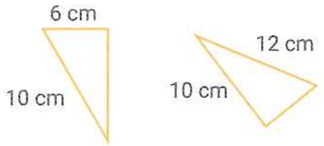
40. Congruencia y semejanza de triángulos rectángulos

19. **Expliquen si los siguientes triángulos rectángulos son congruentes.**

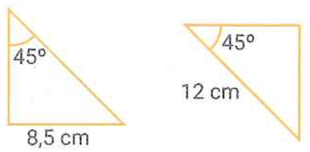
a.



b.

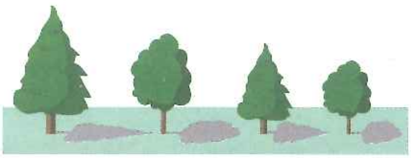


c.

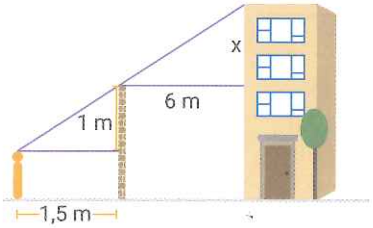


20. **Lean atentamente y resuelvan.**

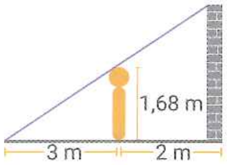
a. A las cuatro de la tarde, las sombras de estos arbolitos miden: 10 m, 6 m, 4 m y 2 m, respectivamente. El árbol más chico tiene una altura de 1,5 m. Calculen la altura del resto de los árboles.



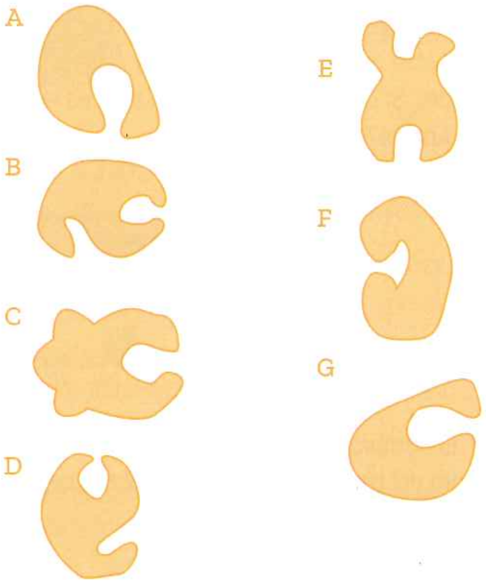
b. Tengan en cuenta los datos de la figura y calculen la distancia que hay del segundo al tercer piso (x).



c. Una persona que mide 1,68 m se colocó a 2 m de un muro de forma tal que el extremo de su sombra coincida con el extremo de la sombra del muro. La sombra que proyecta la persona es de 3 m.
¿Cuál es la altura del muro?

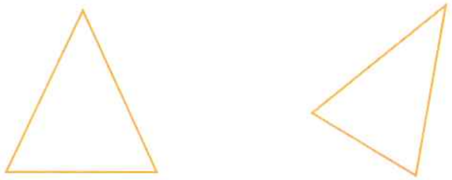


21. Observen las figuras y rodeen con el mismo color las letras de las que son congruentes.



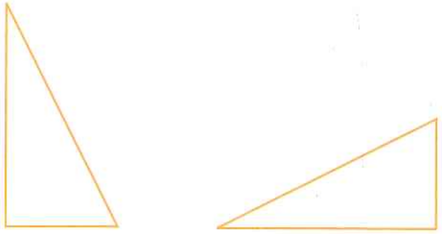
22. Marquen con una X los pares de figuras congruentes.

a.



☐

b.

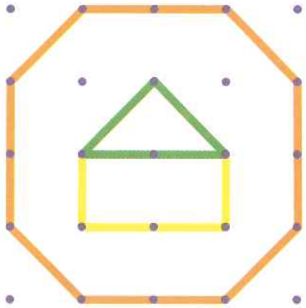


☐

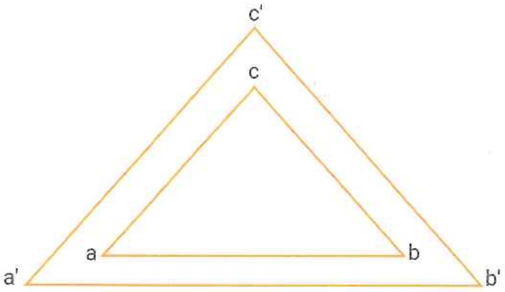
c.

☐

23. Realicen un dibujo semejante al siguiente cuyas dimensiones sean el doble.



24. Midan los lados y los ángulos de los siguientes triángulos. Luego, calculen la razón de semejanza.

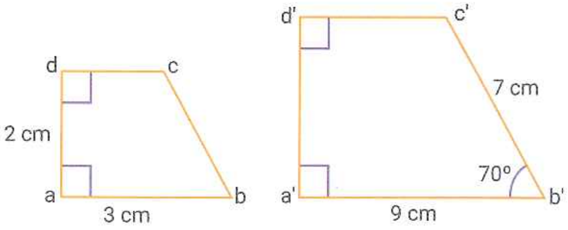


25. Dibujen un triángulo abc y desde cada vértice tracen una recta paralela al lado opuesto. Así obtendrán un nuevo triángulo más grande.

a. Expliquen por qué el nuevo triángulo es semejante al inicial.

b. Hallen la razón de semejanza y comparen el resultado con el de sus compañeros.

26. Tengan en cuenta que los polígonos son semejantes y completen.

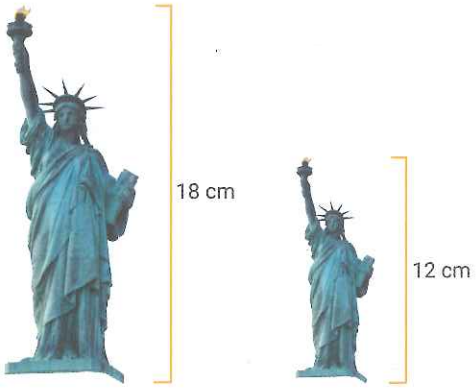


$\hat{c}$ = ☐ Razón = ☐

$\overline{bc}$ = ☐ $\overline{a'd'}$ = ☐

27. **Lean atentamente y resuelvan.**

En un local de Nueva York venden réplicas de la estatua de la Libertad. Las hay de dos tamaños: de 18 cm y de 12 cm de altura.

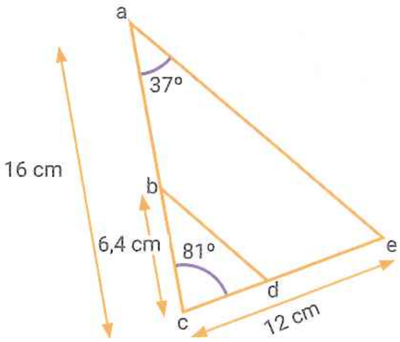


a. ¿Son semejantes? En caso de serlo, ¿cuál es la razón de semejanza entre la estatua grande y la pequeña?

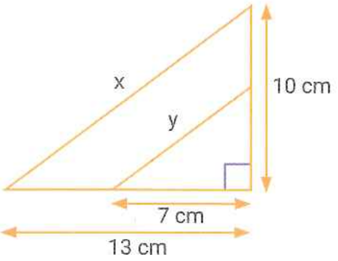
b. La cabeza de la estatua mayor mide 2,25 cm de alto. ¿Cuánto mide la de la pequeña?

28. **Calculen la medida del segmento cd y del ángulo d.**

$\overline{bd} \,//\, \overline{ae}$

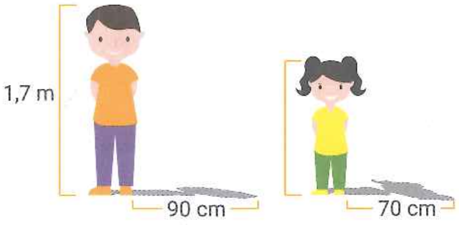


29. **Tengan en cuenta que los triángulos rectángulos son semejantes y calculen el valor de "x" y de "y".**

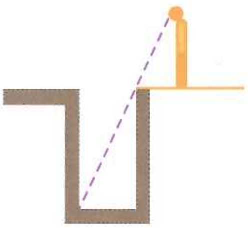


30. **Lean atentamente y resuelvan.**

a. A cierta hora del día, Lorenzo y Ángela se colocan de pie en el patio de la escuela. Lorenzo proyecta una sombra de 90 cm y Ángela, una de 70 cm. Si Lorenzo mide 1,7 m, ¿cuál es la altura de Ángela?

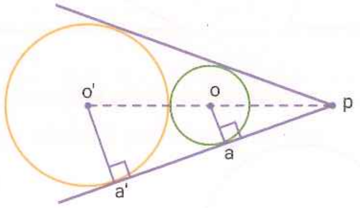


b. El hombre de la imagen mide 17 dm y está a 8 dm del pozo. Si el pozo tiene 12 dm de ancho, ¿cuál es su profundidad?



31. **Resuelvan con un compañero.**

Desde un punto p se trazaron las tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores.
$\overline{op}$ = 12 cm y $\overline{o'a'}$ = 5 cm.
Calculen cuánto mide el radio de la circunferencia menor.



7 Movimientos en el plano

41. Traslación

▶ SABERES DINÁMICOS

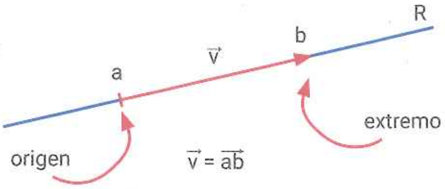
Magnitudes vectoriales

Las **magnitudes vectoriales** quedan determinadas por una dirección, sentido y módulo que se pueden representar gráficamente por medio de un vector. Por ejemplo, la velocidad con que se mueve un móvil es una magnitud vectorial.

Un **vector** es un segmento orientado con un origen y un extremo, que tiene una dirección, un sentido y un módulo determinados.

Características de los vectores:

- **Dirección**: está dada por la posición de la recta que lo contiene. Por ejemplo, dos vectores que están contenidos en rectas paralelas tienen la misma dirección.
- **Sentido:** está indicado por la flecha.
- **Módulo:** es la longitud del vector.



Dos o más vectores son **equipolentes** si tienen la misma dirección, sentido y módulo.

El vector **nulo** es aquel en el cual coincide el extremo con el origen.

Dos vectores son **opuestos** cuando tienen la misma dirección, el mismo módulo, pero distinto sentido.

Áreas dinámicas [Matemática y Físico Química]

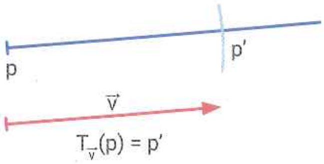
Al introducir la noción de fuerza para describir las interacciones que se pueden dar entre cuerpos que están en equilibrio o no, es necesario poder representarlas como vectores, indicando no solo la interacción, sino también la dirección y sentido del efecto que esta provoca.

Traslación

Una **traslación** es un movimiento que se realiza a partir de un vector en una dirección, sentido y módulo determinados. El vector que se toma como referencia para realizar una traslación se denomina **vector traslación.**
Trasladar el punto p según un vector $\vec{v}$ significa encontrar un punto p' tal que $\overrightarrow{pp'} = \vec{v}$.
Para realizar la traslación pueden seguir estos pasos.

1. Se traza una semirrecta con origen en p que tenga la misma dirección y sentido que el vector.

2. Con centro en p y abertura igual a la longitud del vector se traza un arco que corte a la semirrecta en p'.



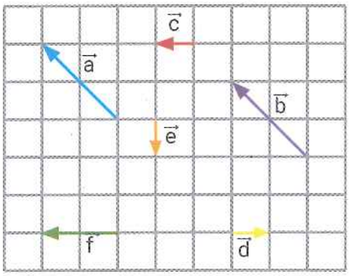
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Dos vectores con el mismo módulo, ¿son siempre equipolentes?
   b. Si se aplica a cualquier figura una traslación, ¿se obtiene una figura congruente a la anterior?
   c. Investiguen el concepto de isometría e indiquen si la traslación corresponde a una isometría.

ACTIVIDADES

41. Traslación

1. **Observen los siguientes vectores e indiquen lo pedido en cada caso.**



a. Indiquen un par de vectores opuestos.

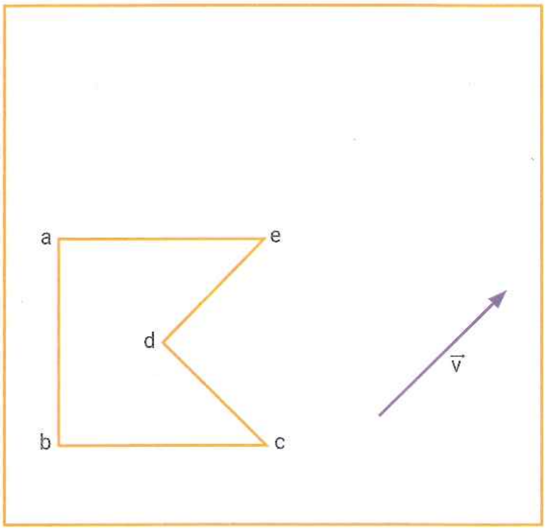
b. Indiquen un par de vectores equipolentes.

c. Un vector equipolente con la mitad de otro.

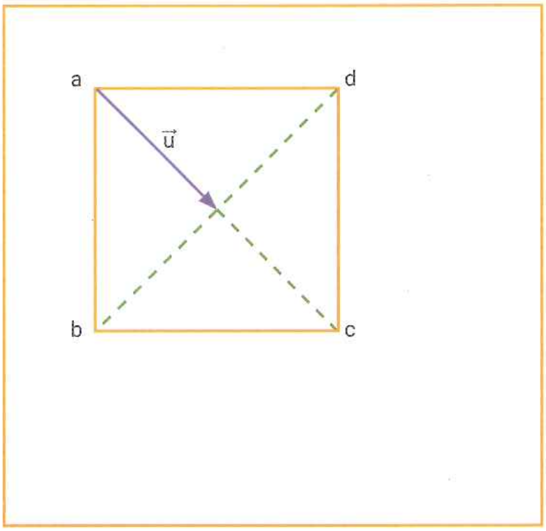
d. Dos vectores incluidos en rectas perpendiculares.

2. **Realicen las siguientes traslaciones.**

a. $T_{\vec{v}}$ (abcde) = a'b'c'd'e'

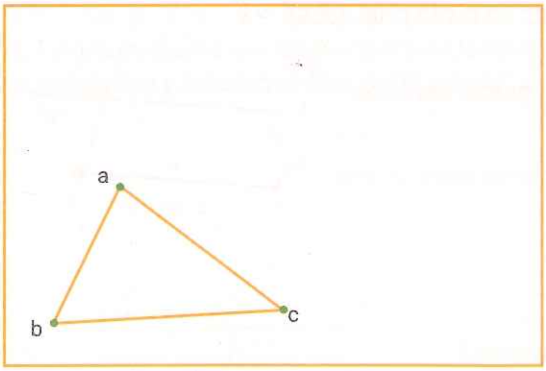


b. $T_{\vec{u}}$ (abcd) = a'b'c'd'

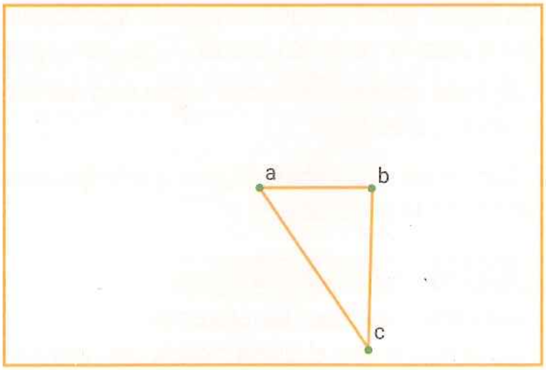


3. **Reúnanse con un compañero y realicen las siguientes traslaciones. Investiguen en cada caso si existe una traslación que transforme la primera figura en la tercera.**

a. $T_{\overline{ba}}$ (abc) = a'b'c' y $T_{\overline{ac}}$ (a'b'c') = a"b"c"



b. $T_{\overline{cb}}$ (abc) = a'b'c' y $T_{\overline{ba}}$ (a'b'c') = a"b"c"

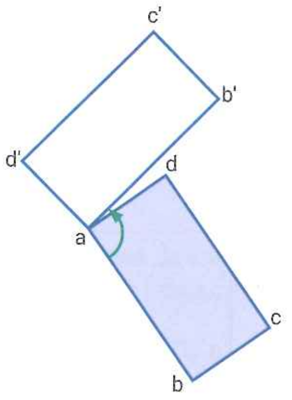
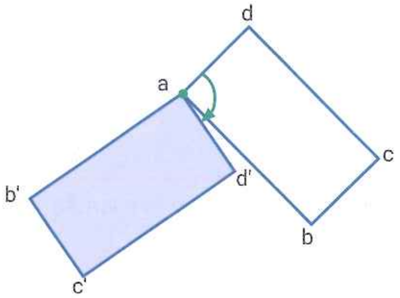


c. Inviertan en cada ítem el orden de las traslaciones y comparen los resultados.

42. Rotación

▶ SABERES DINÁMICOS

Para realizar una **rotación** o **giro**, se debe conocer el centro, el ángulo y el sentido de la misma. Por convención, se considera negativo al sentido con que se mueven las agujas del reloj (sentido horario) y positivo, al sentido contrario (sentido antihorario).

Rotación con ángulo positivo (antihorario)	Rotación con ángulo negativo (horario)
	

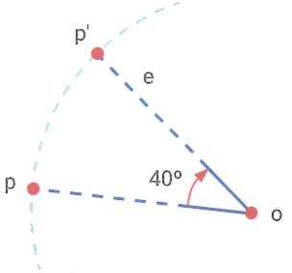
La **rotación de un punto** "p" con respecto a un centro "o" y ángulo de giro $\hat{\alpha}$ es p', si se cumple que $\overline{op} = \overline{op'}$ y $\hat{\alpha} = p\hat{o}p'$.

Por ejemplo, para realizar la rotación de un punto "p" con respecto al centro "o" y $\hat{\alpha} = -40°$, se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza $\overline{op}$.

2. Con el transportador se traza el ángulo de 40° con centro en "o", teniendo en cuenta el sentido horario (ya que el ángulo es negativo).

3. Con centro en "o" y radio igual a $\overline{op}$ se traza un arco que corte al otro lado del ángulo en p'.



$$R_{(o;\,-40°)}(p) = p'$$

Para realizar la rotación de una figura, se rotan sus vértices y luego se dibuja la figura que determinan.

TEST DE COMPRENSIÓN

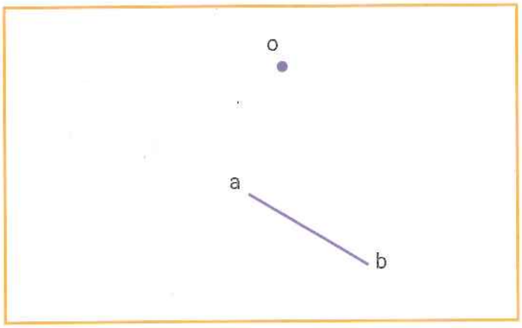
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es posible realizar una rotación conociendo solo el ángulo de giro?
   b. La rotación ¿es una isometría?
   c. Dibujen un cuadrado y determinen el punto "o" en la intersección de sus diagonales. ¿Qué rotaciones de centro "o" transforman al cuadrado en sí mismo?

ACTIVIDADES

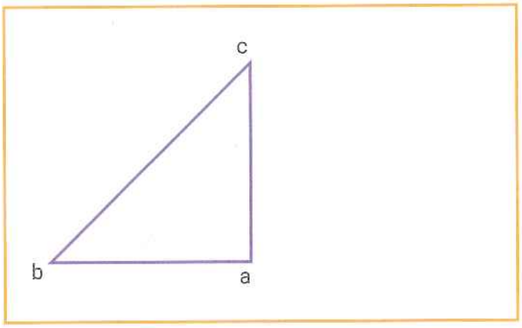
42. Rotación

4. Realicen las siguientes rotaciones.

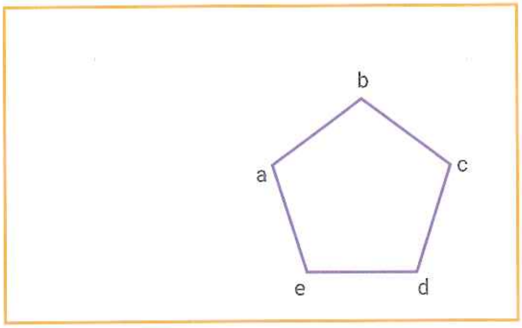
a. $R_{(o;\ 50°)}(\overline{ab})=$



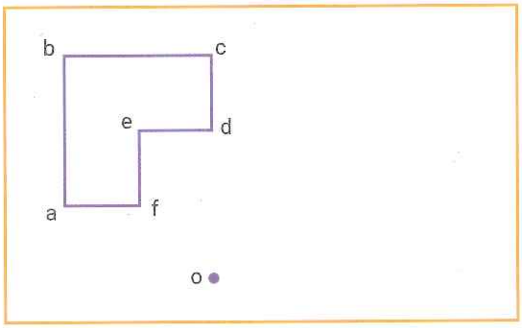
c. $R_{(a;\ -90°)}(abc) =$



b. $R_{(a;\ 180°)}(abcde) =$



d. $R_{(o;\ 270°)}(abcdef) =$



5. Completen con una rotación equivalente.

a. $R_{(o;\ -230°)} =$

b. $R_{(a;\ 120°)} =$

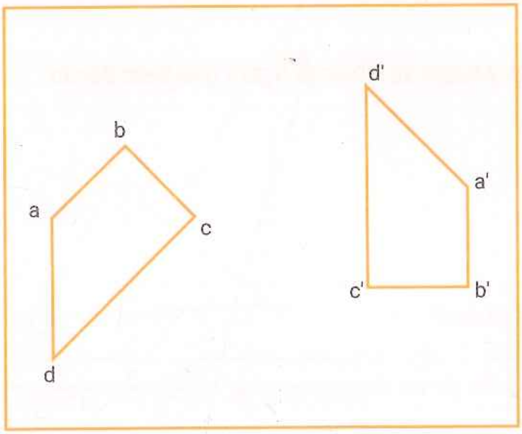
c. $R_{(o;\ 90°)} =$

d. $R_{(c;\ -180°)} =$

e. $R_{(b;\ 0°)} =$

f. $R_{(a;\ 330°)} =$

6. Reúnanse en grupos y hallen el centro de rotación. Expliquen el procedimiento.



43. Simetría central

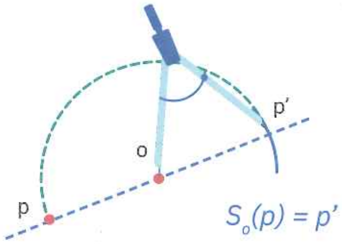
▶ SABERES DINÁMICOS

El **simétrico de un punto** "p" **respecto de un centro** "o" es p', si se verifica que "o" es el punto medio del segmento determinado por p y p'.

Para hallar el simétrico de un punto "p" con respecto a un centro "o", se pueden seguir estos pasos.

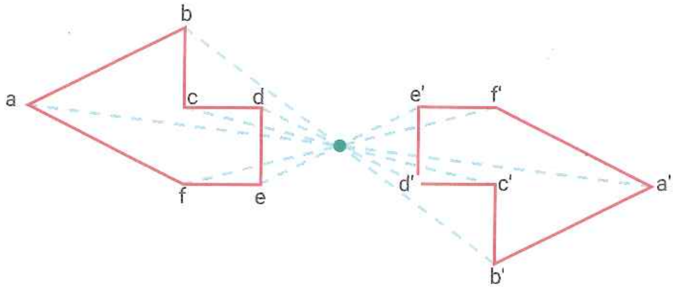
1. Se traza la recta que pasa por los puntos p y o.

2. Con centro en o y radio igual a $\overline{op}$, se traza un arco que interseque a la recta en el punto p'.

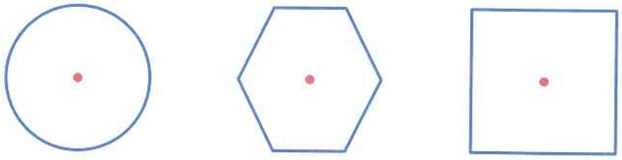


Para encontrar el **simétrico de una figura** con respecto a un punto, se halla el simétrico de cada uno de sus vértices y luego se traza la figura que estos determinan.

$S_o\ (abcdef) = a'b'c'd'e'f'$



Una figura tiene **centro de simetría** si cada punto de la figura tiene su simétrico, respecto de ese centro, en la misma figura.



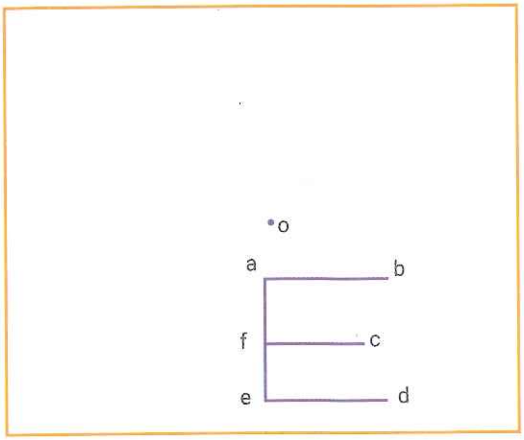
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La simetría central ¿es una rotación?
   b. El pentágono regular, ¿tiene centro de simetría?
   c. Analicen si la siguiente afirmación es correcta.
   "Para tener centro de simetría, un polígono regular debe tener una cantidad par de lados."

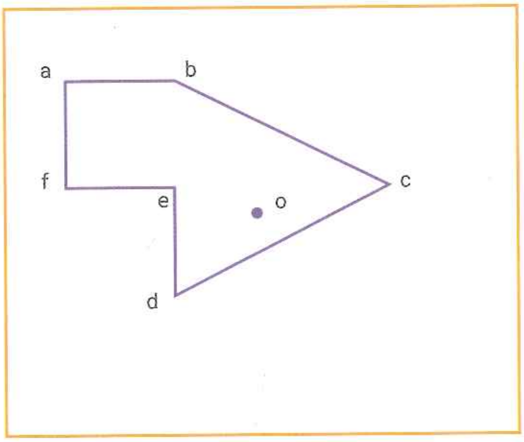
43. Simetría central

7. Realicen las siguientes simetrías centrales.

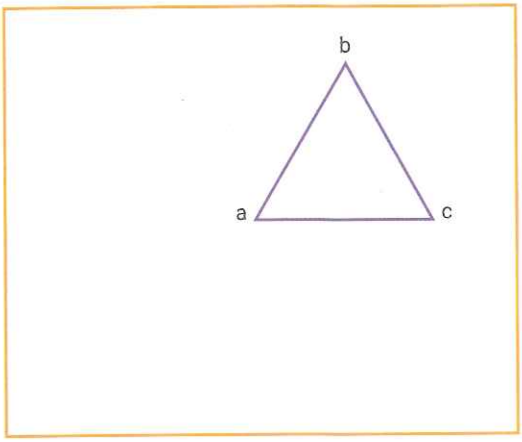
a. S_o(abcdef) =



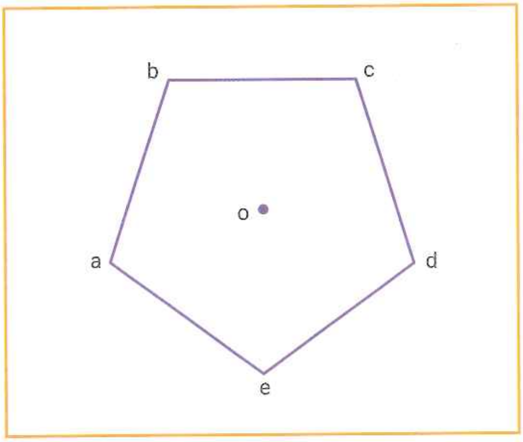
c. S_o(abcdef) =



b. S_a(abc) =

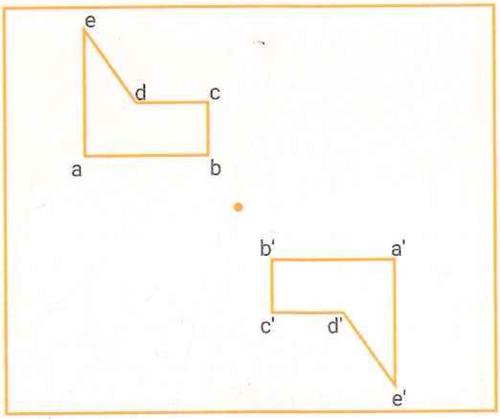


d. S_o(abcde) =

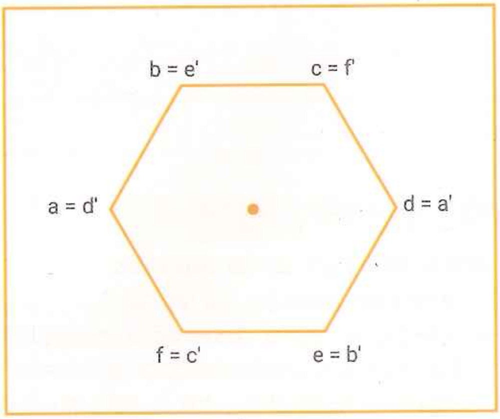


8. Reúnanse en grupos y marquen el centro de simetría en cada caso.

a.



b.



44. Simetría axial

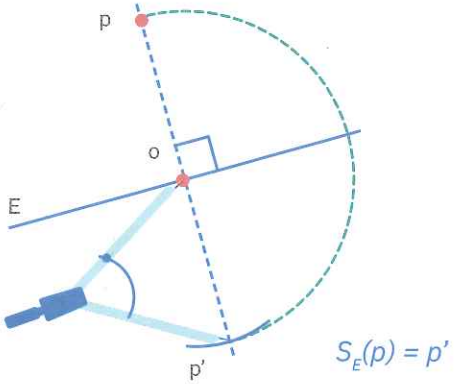
▶ SABERES DINÁMICOS

El **simétrico de un punto** "p" **respecto a un eje** E es p', si se verifica que el eje es la mediatriz del segmento determinado por p y p'.

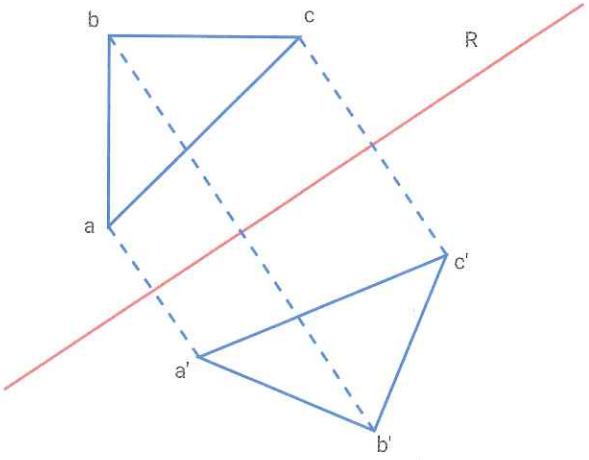
Para hallar el simétrico de un punto p con respecto a un eje E, pueden seguir estos pasos.

1. Se traza una recta M, perpendicular al eje E, que pase por el punto p y corte al eje en "o".

2. Con centro en "o" y radio $\overline{op}$ se traza un arco que corte a M en el punto p'.



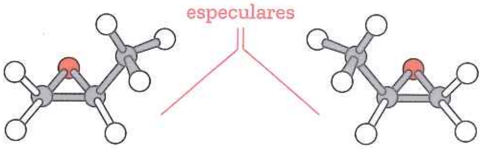
Para encontrar el **simétrico de una figura** con respecto a un eje, se halla el simétrico de cada uno de sus vértices y luego se dibuja la figura que determinan.



Áreas dinámicas [Matemática y Química]

La simetría axial se puede observar en moléculas como los isómeros quirales. Los isómeros quirales son moléculas con propiedades iguales, pero con capacidad diferente para desviar la luz polarizada. Su comportamiento ante esta luz se debe a que cada molécula es la imagen especular de la otra.

Óxido de propileno



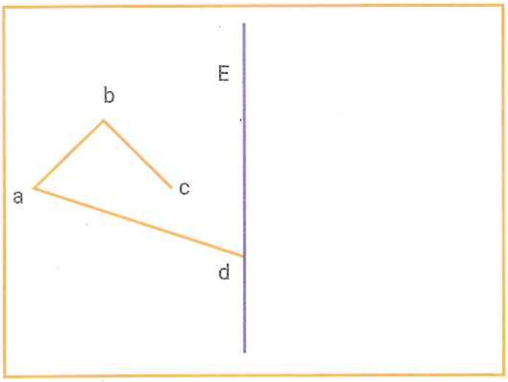
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si a un romboide se le aplica una simetría tomando como eje la diagonal principal, ¿dónde quedan los vértices que no pertenecen a esa diagonal?
   b. Si la distancia de un punto "a" al eje de simetría es 3 cm, ¿cuál es la medida de $\overline{aa'}$?
   c. ¿Por qué se puede decir que el eje de simetría es la mediatriz de todo segmento trazado entre un punto y su simétrico?

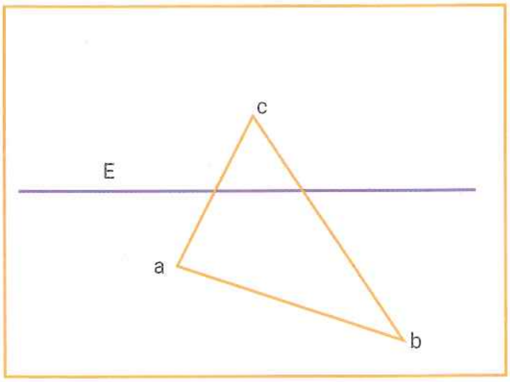
44. Simetría axial

9. **Hallen las siguientes simetrías axiales.**

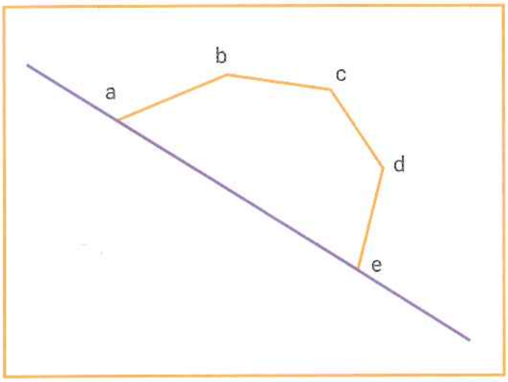
a. S_E(abcd) =



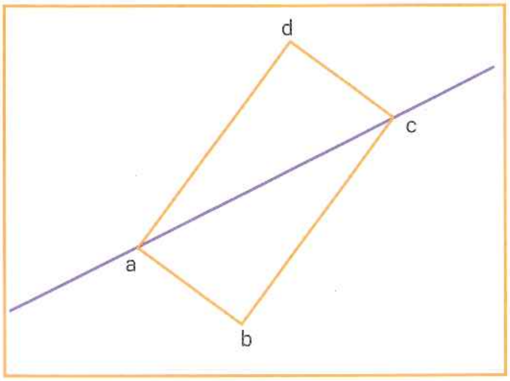
c. S_E(abc) =



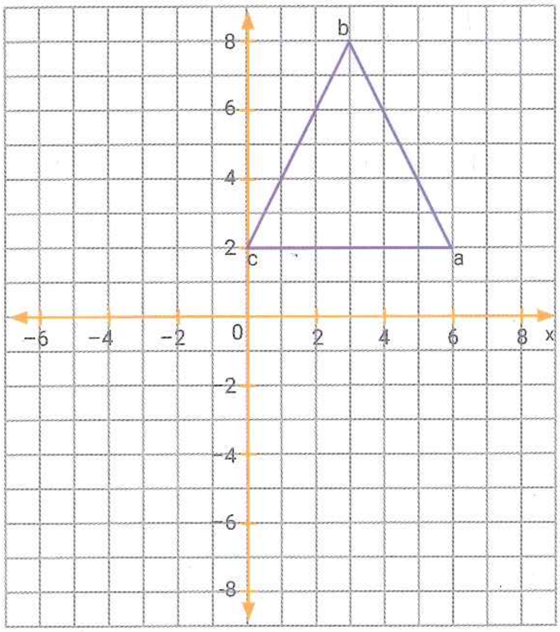
b. $S_{\overline{ae}}$(abcde) =



d. $S_{\overline{ac}}$(abcd) =



10. **Encuentren el simétrico de la figura respecto a cada uno de los ejes. Luego, escriban las coordenadas de cada figura.**



Triángulo abc:

a = (;) b = (;) c = (;)

Simétrico respecto al eje y:

a' = (;) b' = (;) c' = (;)

Simétrico respecto al eje x:

a'' = (;) b'' = (;) c'' = (;)

11. Escriban V (verdadero) o F (falso).

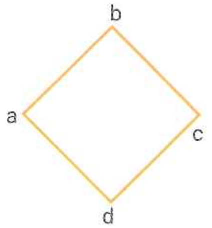
a. Dos vectores que tienen sentido contrario son opuestos. ☐

b. El vector nulo se representa con un punto. ☐

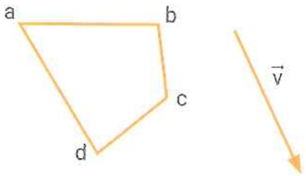
c. La traslación conserva la congruencia de las figuras. ☐

12. Apliquen las traslaciones pedidas en cada caso.

a. $T_{\vec{ac}}$ (abcd)

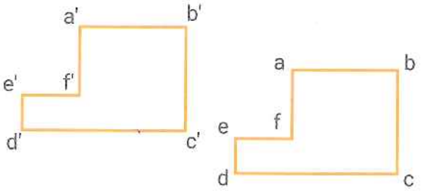


b. $T_{\vec{v}}$ (abcd)

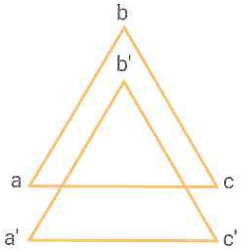


13. Dibujen el vector traslación en cada caso.

a.

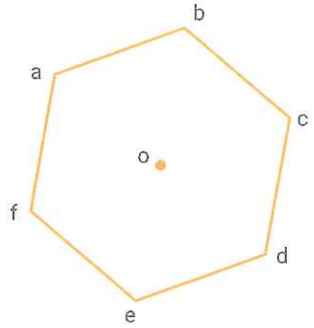


b.

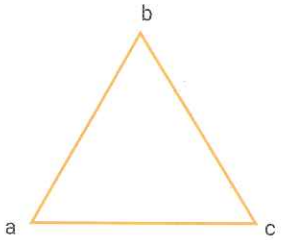


14. Apliquen las rotaciones pedidas en cada caso.

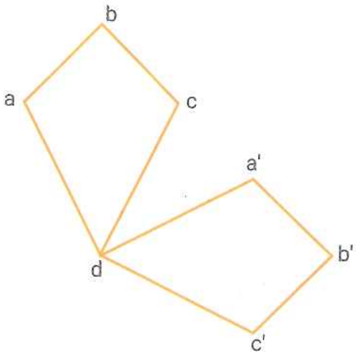
a. $R_{(o;\ 45°)}$ (abcdef)



b. $R_{(c;\ 330°)}$ (abc)



15. Marquen el centro de rotación y el ángulo de giro.



16. Escriban rotaciones equivalentes a las indicadas.

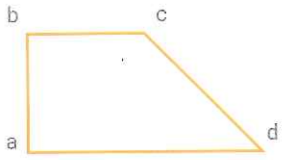
a. $R_{(o;\ -75°)} = R$ ______

b. $R_{(b;\ 220°)} = R$ ______

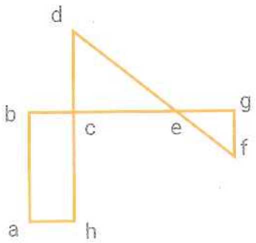
c. $R_{(a;\ 410°)} = R$ ______ $= R$ ______

17. Construyan las simetrías centrales pedidas en cada caso.

a. S_o (abcd), siendo "o" el punto medio de $\overline{ad}$.

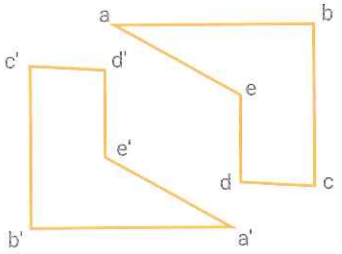


b. S_f (abcdefgh)

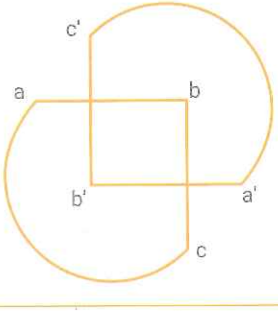


18. Marquen el centro de simetría entre las dos figuras.

a.

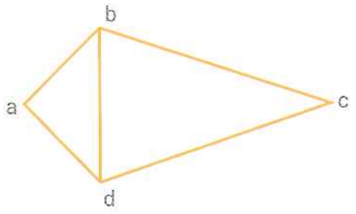


b.

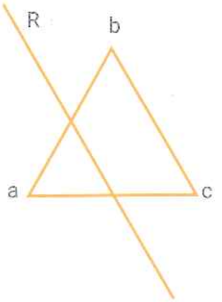


19. Construyan las simetrías axiales pedidas en cada caso.

a. $S_{\overline{bd}}$ (abcd)

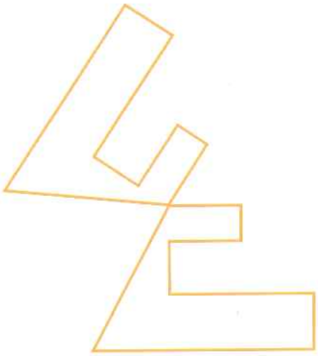


b. S_R (abc)

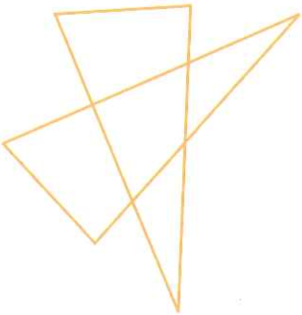


20. Tracen el eje de simetría entre las dos figuras.

a.



b.

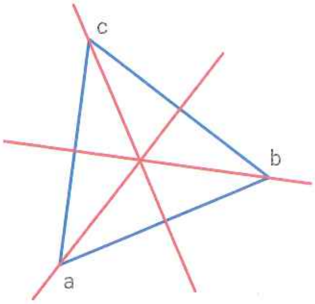


45. Eje de simetría de figuras planas

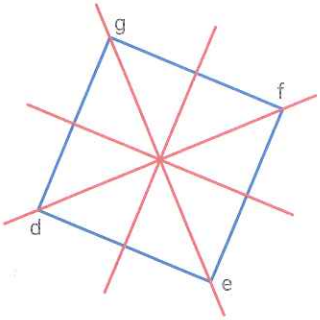
▶ SABERES DINÁMICOS

Una figura tiene **eje de simetría** si cada punto de ella tiene su simétrico en la misma figura respecto del eje. Todos los polígonos regulares tienen ejes de simetría.

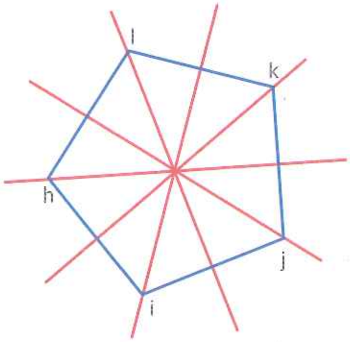
El triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría.



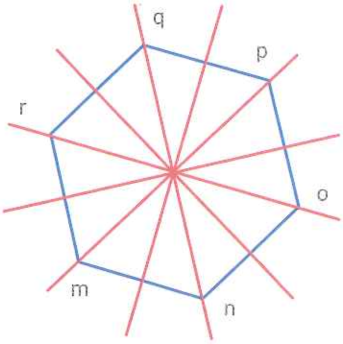
El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.



El pentágono regular tiene cinco ejes de simetría.



El hexágono regular tiene seis ejes de simetría.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un romboide?
   b. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un círculo?
   c. ¿Qué relación existe entre la cantidad de lados de un polígono regular y la cantidad de ejes de simetría?
   d. Busquen un objeto con forma de prisma rectangular e indiquen cuántos planos de simetría tiene.

ACTIVIDADES

45. Eje de simetría de figuras planas

21. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. Todo cuadrilátero tiene cuatro ejes de simetría.

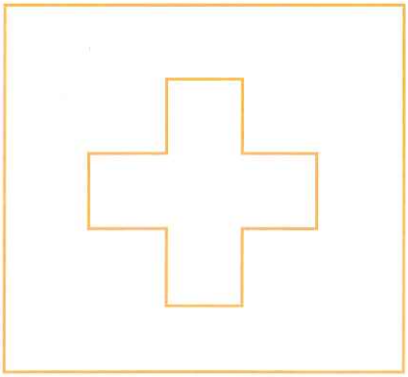
b. Un polígono regular con siete ejes de simetría es un heptágono.

c. Un hexágono tiene siempre seis ejes de simetría.

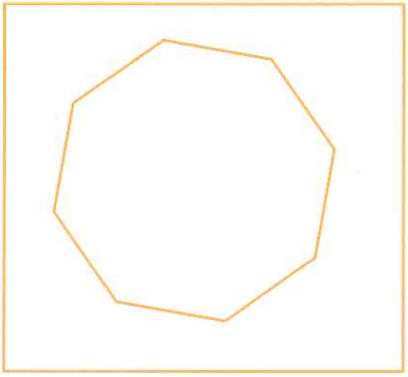
d. Un polígono regular que tiene solo dos diagonales, tiene cuatro ejes de simetría.

22. Tracen los ejes de simetría de las siguientes figuras geométricas.

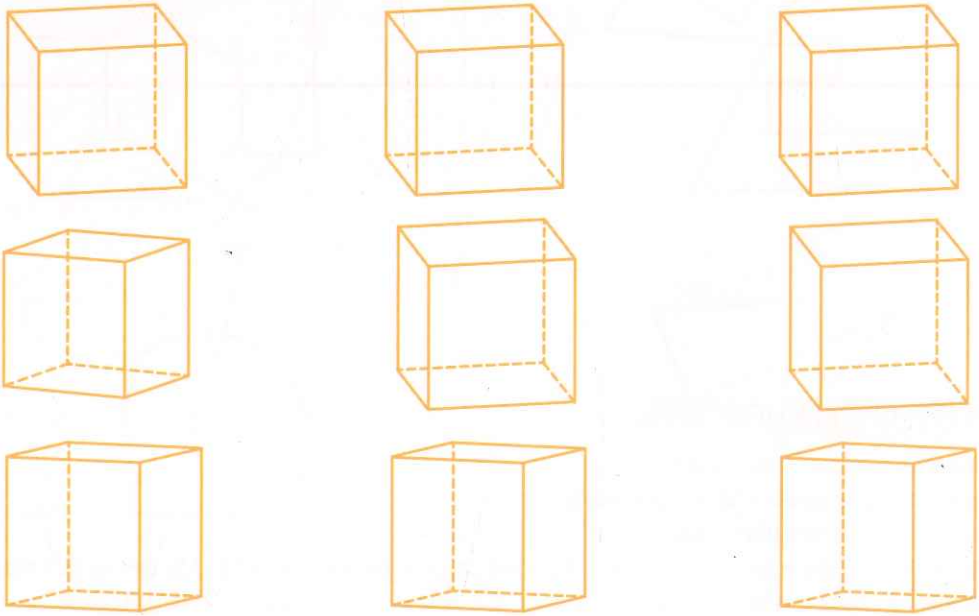
a.



b.



23. Reúnanse en grupos, dibujen un cubo en sus carpetas y marquen los ejes de simetría de cada cara. Luego, ubiquen los nueve planos de simetría que se pueden trazar.



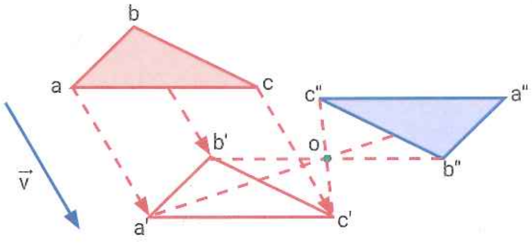
46. Composición de movimientos

▶ SABERES DINÁMICOS

Aplicar una **composición de movimientos a una figura** significa aplicarle un movimiento, y a la figura resultante, otro movimiento.

No es lo mismo aplicar primero una traslación y luego una simetría, que hacerlo en sentido inverso; por lo tanto, es importante respetar el orden con el que se realizan los movimientos. Para realizar una composición de dos movimientos, primero se realiza el que está escrito a la derecha y luego, sobre la imagen obtenida, el que está a la izquierda.

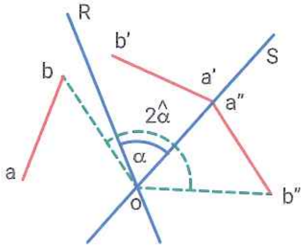
$S_o \circ T_{\vec{v}}\ (abc) = a''b''c''$



- La composición de dos simetrías axiales cuyos ejes se cortan en un punto "o" es una rotación de centro "o" cuyo ángulo de giro es el doble del ángulo formado por los ejes.

$S_S \circ S_R\ (\overline{ab}) = \overline{a''b''}$

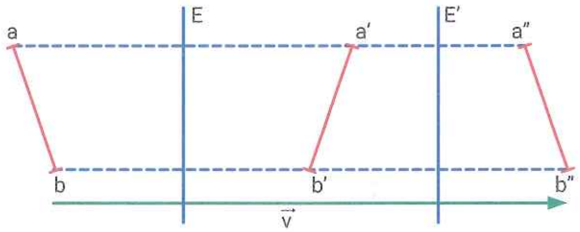
$S_S \circ S_R\ (\overline{ab}) = R_{(o;2\hat{\alpha})}\ (\overline{ab})$



- La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es igual a una traslación.

$S_{E'} \circ S_E\ (\overline{ab}) = \overline{a''b''}$

$S_{E'} \circ S_E\ (\overline{ab}) = T_{\vec{v}}\ (\overline{ab})$



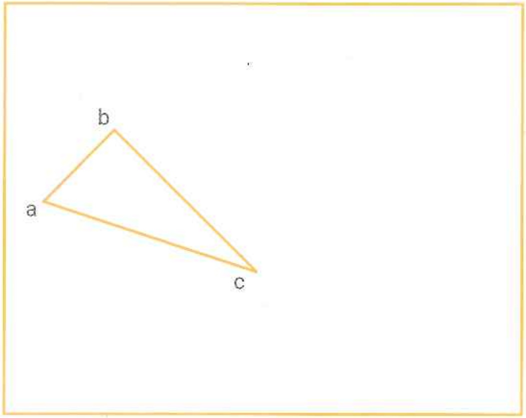
TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué se obtiene cuando a una figura se le aplica la composición de dos traslaciones de vectores opuestos?
   b. ¿Es lo mismo aplicar a una figura $S_o \circ S_{o'}$ que $S_{o'} \circ S_o$?
   c. ¿A qué movimiento equivale $R_{(o;\ 50°)} \circ R_{(o;\ -120°)}$?
   d. ¿Por qué es importante respetar el orden de los movimientos?

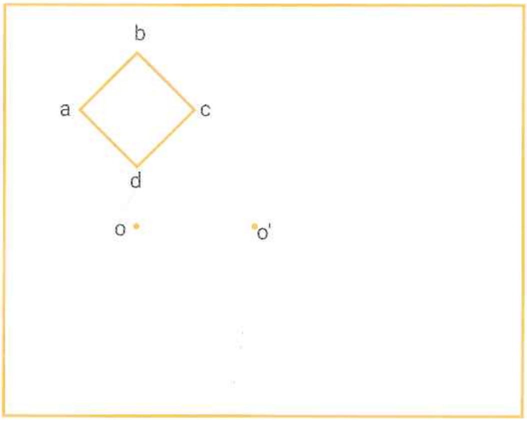
46. Composición de movimientos

24. Realicen las siguientes composiciones de movimientos. Escriban un único movimiento que sea equivalente a la composición.

a. $T_{\overline{(bc)}} \circ T_{\overline{(ab)}}$ (abc) =

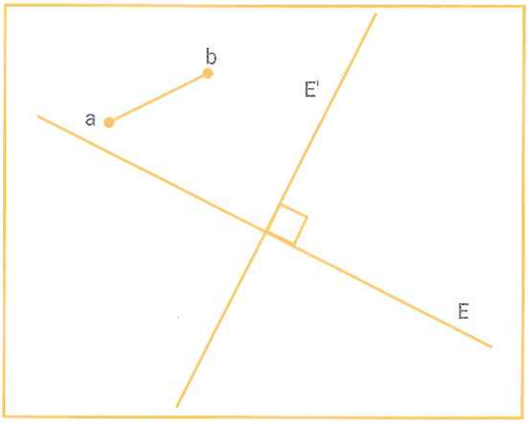


c. $S_{o'} \circ S_{o}$ (abcd) =



b. $R_{(o;\,50°)} \circ R_{(o;\,100°)}$ (a) =

d. $S_{E'} \circ S_{E}$ $(\overline{ab})$ =



25. Realicen en sus carpetas las mismas composiciones de la actividad anterior, pero en el orden inverso. Indiquen en qué casos no varía el resultado.

26. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen todas las respuestas.

a. $R_{(o;\,20°)} \circ R_{(o;\,-100°)} = R_{(o;\,-30°)} \circ R_{(o;\,-50°)}$

b. $R_{(o;\,50°)} \circ R_{(a;\,110°)} = R_{(o;\,160°)}$

c. $S_{o} \circ S_{o'} = S_{o'} \circ S_{o}$

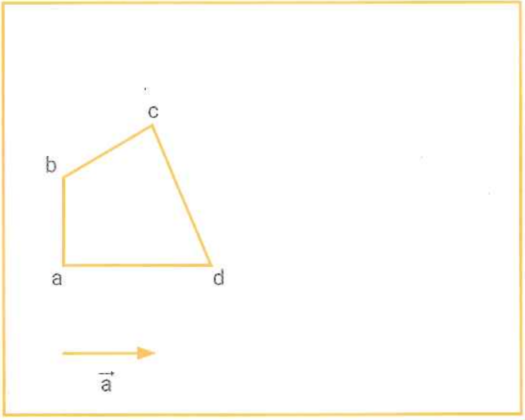
d. $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{0}} = T_{\vec{a}}$

e. $S_{E} \circ S_{E} = T_{\vec{0}}$

46. Composición de movimientos

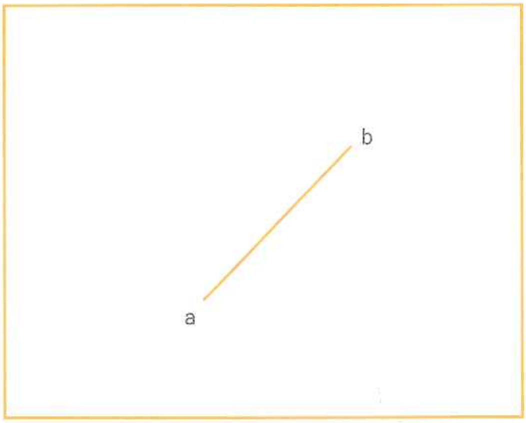
27. Resuelvan aplicando un único movimiento en cada caso. Indiquen qué movimiento aplicaron.

a. $T_{2\vec{a}} \circ T_{\vec{a}} (abcd) = a''b''c''d''$



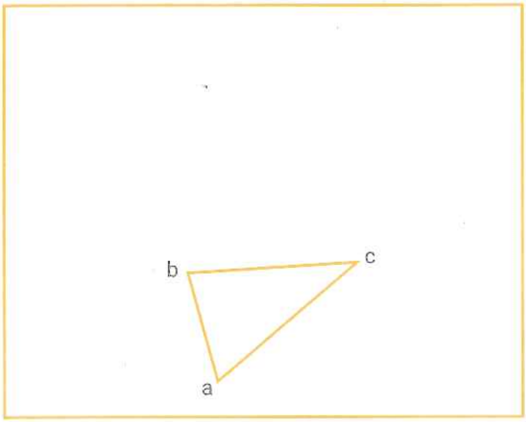
Movimiento aplicado:

b. $R_{(a;\,-100°)} \circ R_{(a;\,130°)} (\overline{ab}) = \overline{a''b''}$



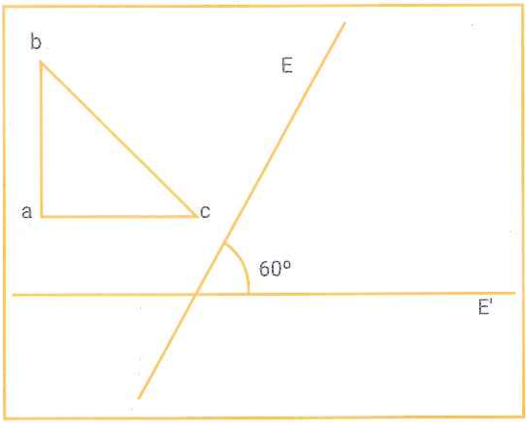
Movimiento aplicado:

c. $S_b \circ S_a (abc) = a''b''c''$



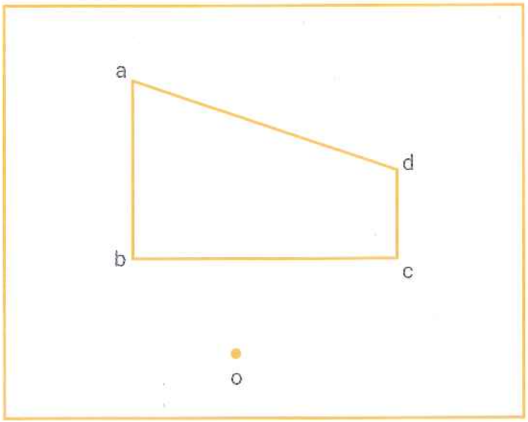
Movimiento aplicado:

d. $S_{E'} \circ S_E (abc) = a''b''c''$



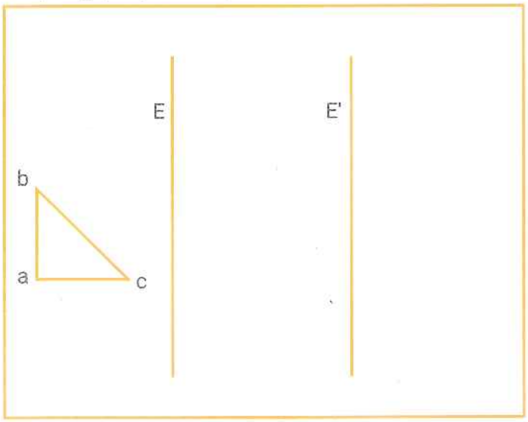
Movimiento aplicado:

e. $R_{(o;\,50°)} \circ R_{(o,\,-50)} (abcd) = a''b''c''d''$



Movimiento aplicado:

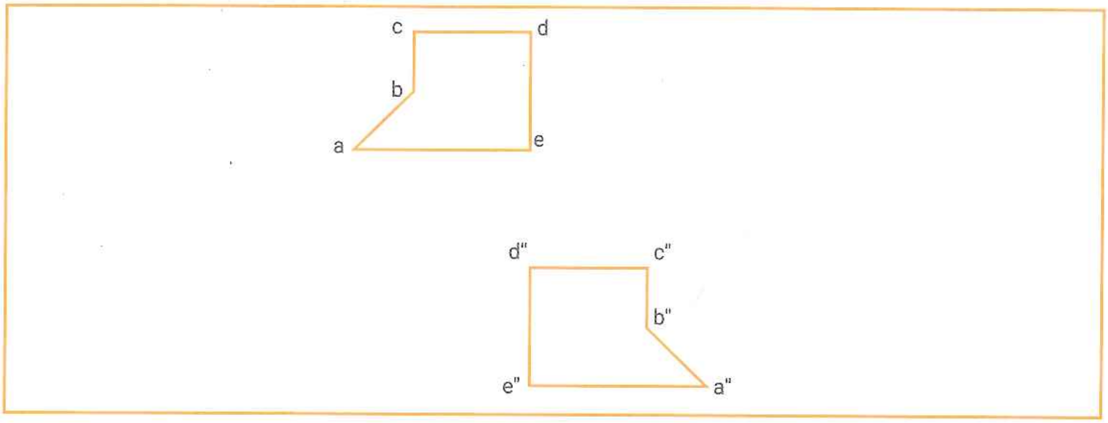
f. $S_{E'} \circ S_E (abc) = a''b''c''$, siendo $E // E'$



Movimiento aplicado:

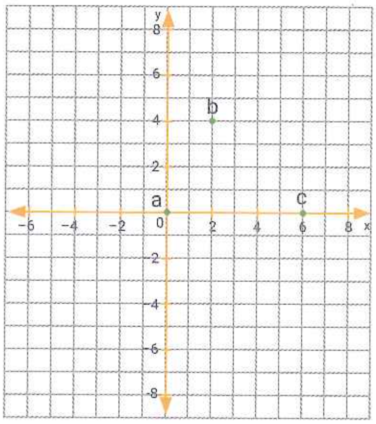
46. Composición de movimientos

28. Escriban la composición de movimientos que transforma el abcde en el a"b"c"d"e".



29. Resuelvan aplicando un único movimiento en cada caso. Luego, indiquen qué movimiento aplicaron y escriban las coordenadas de los vértices del triángulo a"b"c".

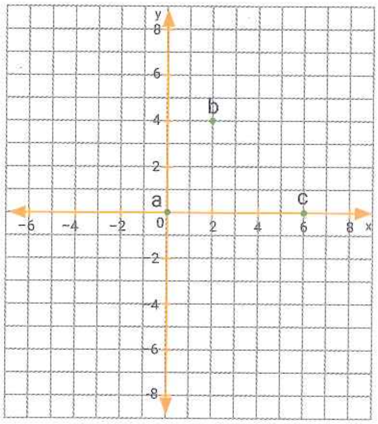
a. $T_{\overrightarrow{bc}} \circ T_{\overrightarrow{ab}}$ (abc) = a"b"c"



Movimiento aplicado:

a" = (;); b" = (;); c" = (;)

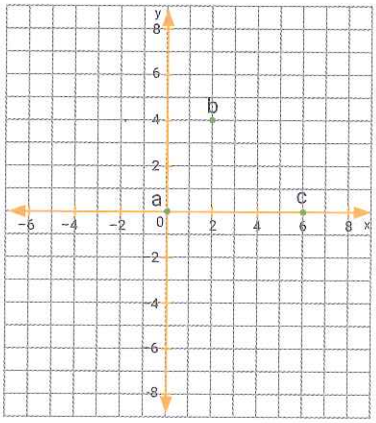
c. $S_{Eje\ y} \circ S_{Eje\ x}$ (abc) = a"b"c"



Movimiento aplicado:

a" = (;); b" = (;); c" = (;)

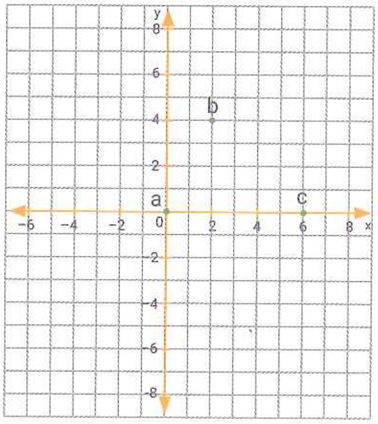
b. $T_{\overrightarrow{ac}} \circ T_{\overrightarrow{ba}}$ (abc) = a"b"c"



Movimiento aplicado:

a" = (;); b" = (;); c" = (;)

d. $R_{(o;\ 50°)} \circ R_{(o;\ 40°)}$ (abc) = a"b"c"



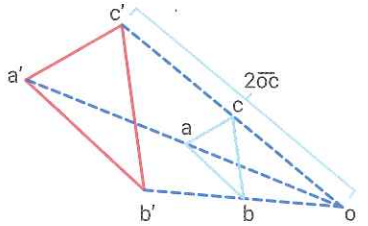
Movimiento aplicado:

a" = (;); b" = (;); c" = (;)

47. Homotecia

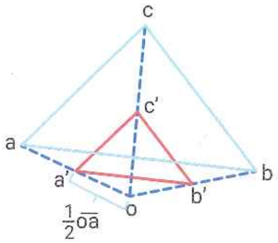
▶ SABERES DINÁMICOS

En todos los movimientos que fueron estudiados, se conserva la forma y la medida.
Se llama **homotecia** de centro **o** y razón **k** (distinta de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto **a** en otro **a'**, de tal forma que se cumpla $\overline{oa'} = |k| \, . \, \overline{oa}$. En este caso, se conserva la forma, pero no la medida.



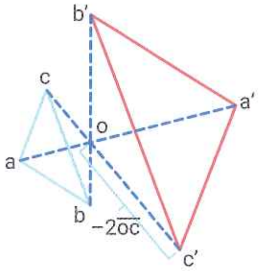
$H_{(o;2)}(abc) = a'b'c'$

"Homotecia de centro o y razón 2"



$H_{(o;\frac{1}{2})}(abc) = a'b'c'$

"Homotecia de centro o y razón $\frac{1}{2}$"

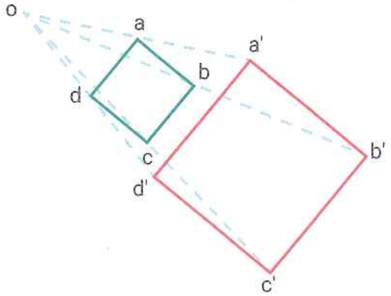


$H_{(o;-2)}(abc) = a'b'c'$

"Homotecia de centro o y razón −2"

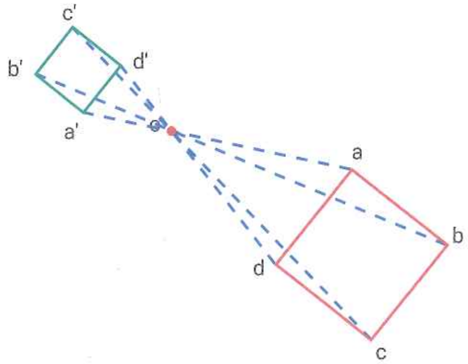
- Si |k| > 1, se obtiene una ampliación de la figura.

$H_{(o;2)}\ (abcd) = a'b'c'd'$



- Si |k| < 1, se obtiene una reducción de la figura.

$H_{(o;\,-\frac{1}{2})}\ abcd = a'b'c'd'$



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/homote * para mirar un video donde se explica cómo realizar una homotecia.

*Enlace acortado de https://youtu.be/zrPuBP1qJk4

TEST DE COMPRENSIÓN

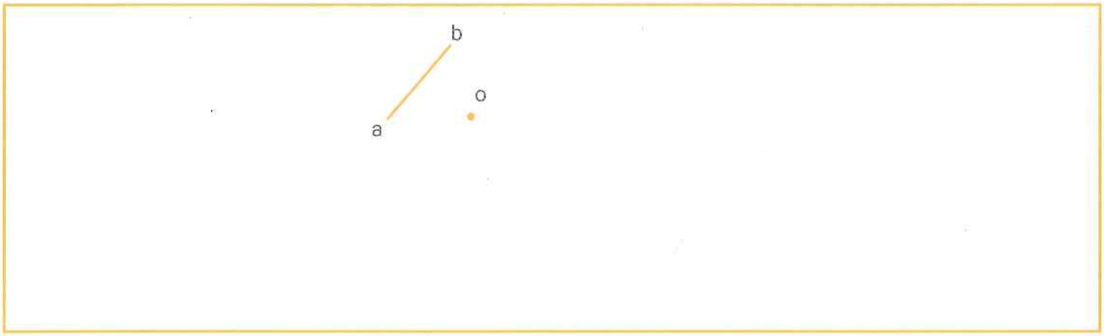
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que se obtiene lo mismo al hacer $H_{(o;-1)}$ que al hacer S_o?
   b. Si a una figura de 10 cm de perímetro se le aplica una homotecia de k = 3, ¿cuál es el perímetro de la figura transformada?
   c. Confeccionen una tabla donde indiquen para qué valores de "k" la figura transformada en una homotecia mantiene un mismo tamaño, aumenta su tamaño o lo disminuye.

ACTIVIDADES

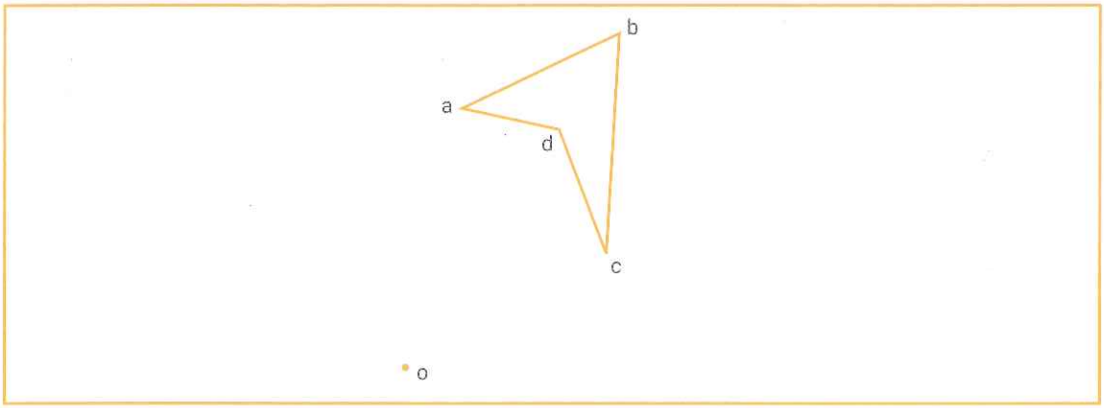
47. Homotecia

30. Apliquen las homotecias indicadas en cada caso.

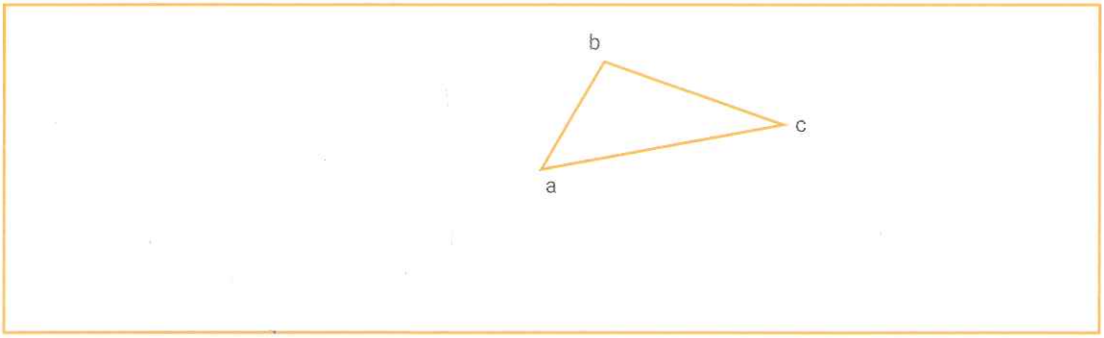
a. $H_{(o;-2,5)}\ (\overline{ab})$



b. $H_{(o;\frac{1}{2})}$ (abcd)



c. $H_{(a;-1)}$ (abc)



DinámicaMente

Lean atentamente y respondan.

a. Se aplicó una homotecia de razón "k" a una figura, y el perímetro de la figura resultante es el doble del de la figura original. ¿Cuál es la razón de homotecia aplicada? Indiquen todas las respuestas posibles.

b. ¿Es cierto que si a un triángulo se le aplica una homotecia de razón k = 0,5, la amplitud de cada ángulo de la figura resultante es la mitad de la de cada ángulo original?

c. Se aplicó una homotecia a un cuadrado y la razón entre el área de la imagen del cuadrado y el cuadrado original es 9. ¿Cuál es la razón de homotecia? Indiquen todas las respuestas posibles.

Integración final

31. Marquen los ejes de simetría en cada uno de los siguientes cuadriláteros.

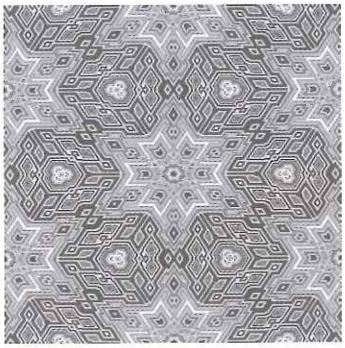
a.

b.

c.

d.

32. Marquen los ejes de simetría en la siguiente obra.



33. Completen con un único movimiento equivalente.

a. $T_{\vec{a}} \circ T_{2a} \circ T_{3a} =$ ______

b. $R_{(o;\,-30°)} \circ R_{(o;\,100°)} \circ R_{(o;\,-120°)} =$ ______

c. $S_o \circ S_{o'} =$ ______

d. $S_o \circ S_o =$ ______

34. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}$ ☐

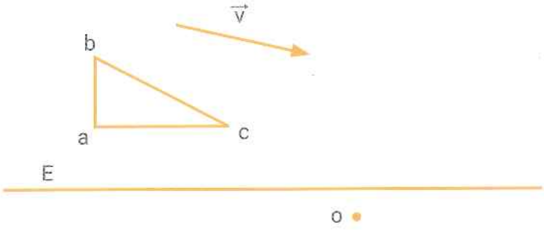
b. $S_{E'} \circ S_E = S_o$, siendo E // E' ☐

c. La composición de dos simetrías centrales es otra simetría central. ☐

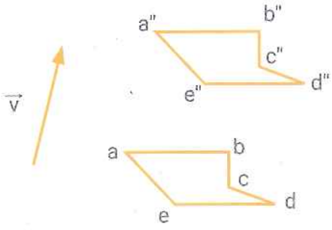
d. La composición de rotaciones es otra rotación cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las rotaciones de la composición. ☐

35. Apliquen a la figura la siguiente composición de movimientos.

$S_o \circ T_{\vec{v}} \circ S_E$ (abc)



36. Escriban la composición de movimientos que transforma al abcde en el a"b"c"d"e".



37. Completen con la medida del ángulo correspondiente.

a. $R_{(o;\,-100°)} \circ R_{(o;\,75°)} = R_{(o;\,\square)}$

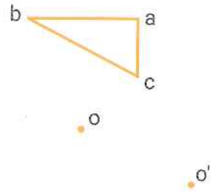
b. $R_{(o;\,135°)} \circ R_{(o;\,\square)} \circ R_{(o;\,-120°)} = R_{(o;\,150°)}$

c. $R_{(o;\,-70°)} \circ R_{(o;\,55°)} = R_{(o;\,-12°)} \circ R_{(o;\,\square)}$

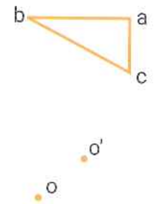
d. $R_{(o;\,40°\,30')} \circ R_{(o;\,-50°\,20')} \circ R_{(o;\,\square)} = R_{(o;\,0°)}$

38. Apliquen la composición indicada en cada caso.

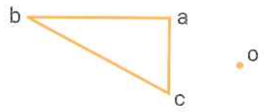
a. $S_{o'} \circ S_o\,(abc)$



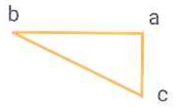
b. $S_o \circ S_{o'}\,(abc)$



c. $S_o \circ S_o\,(abc)$



d. $S_{\overline{bc}} \circ S_{\overline{ac}}\,(abc)$



39. Apliquen la composición indicada en cada caso.

a. $H_{(o;\,3)} \circ H_{(o;\,2)}\,(\overline{ab})$

b. $H_{(o;\,\frac{1}{2})} \circ H_{(o;\,-3)}\,(\overline{ab})$

c. $H_{(o;\,-1)} \circ H_{(o;\,1)}\,(\overline{ab})$

40. Observen las construcciones anteriores y completen con un único movimiento.

a. $H_{(o;\,3)} \circ H_{(o;\,2)} = \square$

b. $H_{(o;\,\frac{1}{2})} \circ H_{(o;\,-3)} = \square$

c. $H_{(o;\,-1)} \circ H_{(o;\,1)} = \square$

41. Reúnanse con un compañero y enuncien a qué equivale la composición de dos homotecias del mismo centro.

8 Estadística

48. Población, muestra y variables

▶ SABERES DINÁMICOS

La **estadística** es una rama de la matemática que recolecta, describe, organiza y analiza datos con el fin de interpretar una situación o predecir algo en una cierta población. Los datos se obtienen mediante instrumentos de recolección como encuestas, entrevistas, observaciones, cuestionarios, experimentos, etc.

La **población** es el conjunto de individuos o elementos que son objeto de estudio (personas, animales, plantas, etc.). Si la población es muy numerosa, se selecciona una parte de la misma que se denomina **muestra**, la cual debe ser representativa (con características similares a la población).

Esta muestra se selecciona para investigar uno o varios temas de esa población que se denominan **variables**.

Tipos de variables

Cualitativas: expresan características o cualidades de la población y no se pueden medir con números. **Por ejemplo:** deportes que practican los alumnos de un curso.	**Cuantitativas:** se expresan con datos numéricos. • **Discretas:** puede tomar una cantidad finita de valores (número contable de valores). Por ejemplo: número de calzado de los jugadores de fútbol de un club. • **Continuas:** puede tomar valores infinitos y por eso se agrupan en intervalos de clases. Estos deben tener la misma amplitud. Por ejemplo: el peso de los alumnos de un curso.

En una fábrica con 560 empleados se realizó una encuesta a 50 de ellos tomados al azar, para saber la cantidad de hijos y su estado civil.
Los datos fueron volcados en las siguientes tablas:

Cantidad de hijos	0	1	2	3	4	Total
Cantidad de empleados	14	19	7	8	2	50

Estado civil	Soltero	Casado	Separado	Viudo	Total
Cantidad de empleados	20	19	9	2	50

Población: 560 empleados. Muestra: 50 empleados.

Variables: en este caso hay dos:

- **Cantidad de hijos** es una variable cuantitativa discreta, ya que toma una cantidad finita de valores.
- **Estado civil** es una variable cualitativa.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/variab* y miren el video donde se explican los diferentes tipos de variables.

* Enlace acortado de https://youtu.be/nCszHELuwxk

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si la población es de 20 personas, ¿es necesario tomar una muestra o se podría tomar el total de la población? ¿Cuándo es necesario tomar una muestra?
   b. ¿Qué método de recolección de datos fue utilizado en el ejemplo?
   c. Den un ejemplo de una variable cuantitativa continua.

48. Población, muestra y variables

1. En las siguientes situaciones indiquen cuál es la población, la muestra y la variable.

a. Se toman al azar 3 000 árboles de la provincia de Buenos Aires para registrar de qué especie son.

b. Se realiza una encuesta al 0,01% de los asistentes a una función de teatro en la costa argentina para saber qué calificación le asignan a la obra.

c. En un club de fútbol donde asisten 320 adolescentes, se toma al azar a 60 de ellos para analizar el índice de masa corporal.

d. En la biblioteca nacional se tomaron al azar 700 libros para saber cuánto pesaban (en gramos).

2. Tengan en cuenta la actividad anterior e indiquen si las variables son cualitativas o cuantitativas, continuas o discretas.

a. c.

b. d.

e. ¿Cuál de las variables de la actividad anterior podría ser considerada de varios tipos dependiendo de los valores que tome? Comparen la respuesta con las de sus compañeros.

3. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas en la carpeta.

Se realizó un estudio a 50 deportistas de entre 20 y 25 años de edad que consistía en correr durante una hora sobre una cinta. Se analizó la edad, la distancia que recorrieron, las botellas de medio litro que bebieron completas y su nivel de cansancio al finalizar (excesivo, moderado o poco).

a. La variable distancia recorrida en una hora es una variable cuantitativa discreta. ☐

b. La cantidad de botellas de medio litro que bebieron completas es una variable cuantitativa continua. ☐

c. La edad de los deportistas es una variable cuantitativa discreta. ☐

d. El nivel de cansancio es una variable cuantitativa discreta. ☐

4. Lean atentamente y resuelvan.

La siguiente tabla corresponde a un estudio estadístico sobre una muestra de una cierta población numerosa. Escriban una posible situación detallando los datos de la población, la muestra y la variable. Compartan la respuesta con sus compañeros.

Candidato	Cantidad de votos
Pablo	23
Erick	45
Ezequiel	8
Santino	12

49. Frecuencias y gráficos

▶ SABERES DINÁMICOS

De cada valor de una variable estadística se puede calcular diferentes frecuencias. Las más conocidas son:

- **Frecuencia absoluta (f):** es la cantidad de veces que se repite cada valor de la variable.
- **Frecuencia relativa (fr):** es el resultado de dividir la frecuencia absoluta por el número de elementos de la muestra.
- **Frecuencia relativa porcentual (fr%):** es la frecuencia relativa expresada en forma decimal multiplicada por 100.
- **Frecuencia absoluta acumulada (fa):** es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores menores o iguales a un cierto valor. Por este motivo, solo se puede calcular en variables cuantitativas o cualitativas que admitan una relación de orden. Por ejemplo, la variable calificación de una obra en excelente, buena, regular, mala, admite un orden.

Estos datos se pueden organizar en tablas para facilitar el análisis de la información.

En una panadería se registró la cantidad de tortas que compró cada cliente el día domingo y los datos fueron volcados en la siguiente tabla.

Cantidad de tortas compradas por cliente	f (cantidad de clientes)	fr (frecuencia relativa)	fr% (frecuencia relativa porcentual)	fa (frecuencia absoluta acumulada)
0	48	0,4	40%	48
1	30	0,25	25%	78
2	24	0,2	20%	102
3	18	0,15	15%	120
Totales	120	1	100%	120

En estadística existen diversas medidas que permiten estudiar características de una variable. Los **números índice** son un ejemplo de ellas: se utilizan para medir y estudiar los cambios de una variable en el tiempo. Se calcula dividiendo el período que deseamos comparar, que se denomina **período actual**, por el período inicial, que se lo denomina **período base**.

$$\text{Número índice} = \frac{\text{período actual}}{\text{período base}}$$

Teniendo en cuenta que el número índice no puede ser cero.

En la panadería también se registraron las ventas anuales de la torta brownie *y del* lemon pie.

Producto	Año 2018	Año 2019	Número índice $\left(\frac{19}{18}\right)$	Variación %
Torta *brownie*	2602	2746	2746/2602 = 1,055	+5,53%
Lemon pie	2500	1089	1089/2500 = 0,435	−56,44%

El **porcentaje de variación** (variación %) es otro indicador que puede ser negativo o positivo y se calcula de la siguiente forma:

En el caso de las ventas de la torta *brownie*: $\frac{2746 - 2602}{2602} \cdot 100\% = 5{,}53\%$, la variación es positiva.

En las ventas del *lemon pie*: $\frac{1089 - 2500}{2500} \cdot 100\% = -56{,}44\%$ la variación es negativa.

Áreas dinámicas [Matemática y Geografía]

El Sistema de Estadísticas Sociodemográficas (SESD) muestra la situación y evolución social del país y de sus jurisdicciones por medio de un conjunto de indicadores. Existen varios índices como el de Necesidades Básicas Insatisfechas (NBI), Índice de Desarrollo Humano (IDH), Producto Bruto Geográfico (PBG), Índice de Esperanza de Vida, entre otros, cuyos cálculos son mucho más complejos.

49. Frecuencias y gráficos

La información que surge de un estudio estadístico puede ser representada en tablas, o bien utilizando un gráfico, el cual permite visualizar con mayor facilidad la información. En el caso de trabajar con variables cualitativas o con variables cuantitativas discretas se pueden utilizar representaciones como el gráfico de barras, el circular y el pictograma.

En una competencia de natación se registró la cantidad de estudiantes que participaron diferenciados por año escolar.

Año	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°
f	4	2	6	4	2	2
fr	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1
fr%	20%	10%	30%	20%	10%	10%

Gráfico de barras: se muestran las frecuencias absolutas de cada valor de la variable.
Todos los rectángulos del gráfico tienen el mismo ancho y las alturas coinciden con las frecuencias absolutas de cada dato.

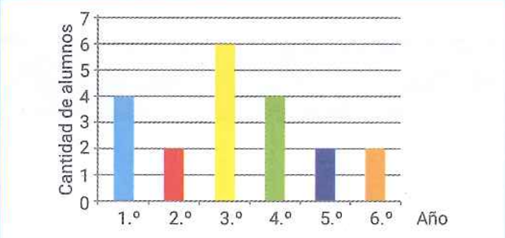
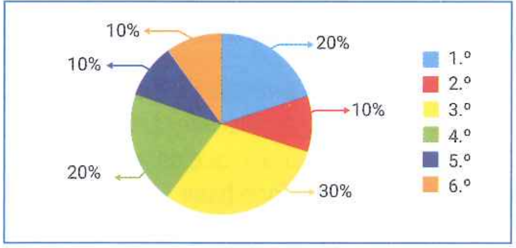


Gráfico circular: se muestran las frecuencias relativas porcentuales de cada dato. Este gráfico está dividido en sectores.
Para calcular el ángulo central de un sector, por ejemplo, para el dato "1.°", se realiza el siguiente cálculo:

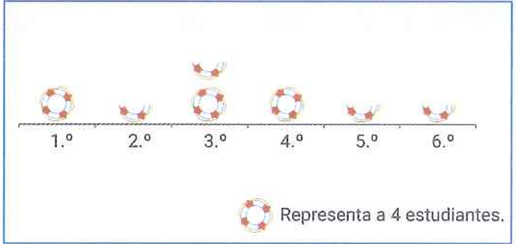


$$100\% \longrightarrow 360^\circ$$

$$20\% \longrightarrow x = \frac{20\% \,.\, 360^\circ}{100\%}$$

$$x = 72^\circ$$

Pictograma: las frecuencias absolutas se representan con dibujos relacionados con el tema. Se toma como referencia un dibujo que representa una determinada cantidad.



TEST DE COMPRENSIÓN

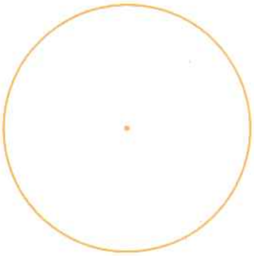
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En el cálculo del número índice de la torta *brownie* que figura en el ejemplo, ¿qué debería suceder para que el índice dé 1? ¿Qué significa con respecto a las ventas?
   b. Expliquen, utilizando la terminología adecuada, cómo se calcula el porcentaje de variación.
   c. ¿Es cierto que el ángulo central de un sector en el gráfico circular también se puede calcular tomando el valor de la frecuencia relativa multiplicada por 360°? Verifiquen con el ejemplo dado y expliquen por qué sucede esto.

49. Frecuencias y gráficos

5. Completen la siguiente tabla y realicen un gráfico circular.

En el centro del servicio meteorológico se registraron las condiciones del tiempo en el mes de marzo.

Condiciones del tiempo	f (Cantidad de días)	fr	fr%	Ángulo central
Soleado	18			
Nublado	8			
Lluvia	5			



6. Observen la siguiente tabla y resuelvan.

En una heladería se registró el precio del kilo de helado artesanal en los años 2018, 2019 y 2020 y se volcaron los datos en la siguiente tabla.

	2018	2019	2020	Número índice $\frac{20}{19}$	Número índice $\frac{20}{18}$
Precio del kilo de helado	$405	$600	$810		

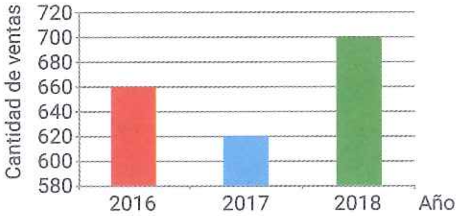
a. Completen la tabla.

b. ¿Cuál es el porcentaje de variación del precio del kilo de helado del año 2019 respecto del 2018?

c. ¿Cuál es el porcentaje de variación del precio del kilo de helado del año 2020 respecto del 2018? ¿Qué significa ese número? Relaciónenlo con el número índice $\frac{20}{18}$.

7. Observen el siguiente gráfico y resuelvan.

En un local de electrónica se registró la cantidad de ventas de vaporeras al cabo de tres años. Los resultados se volcaron en el siguiente gráfico.



a. Calculen el número índice $\frac{18}{17}$, $\frac{18}{16}$, $\frac{17}{16}$.

b. Analicen los resultados del ítem a. Expliquen con sus palabras qué significa respecto a las ventas, si el número índice da mayor a uno o si da menor a uno.

c. Calculen el porcentaje de variación de las ventas del año 2018 respecto del 2017 y la variación del 2017 respecto del 2016.

d. Analicen los resultados del ítem c y expliquen qué sucede con las ventas cuando la variación da positiva y cuando da negativa.

49. Frecuencias y gráficos

8. Lean atentamente y resuelvan.

La siguiente tabla muestra la cantidad de infracciones por exceso de velocidad en las calles San Martín y Belgrano tomadas por un radar con cámara de fotomultas.

	2000	2001	2002	Número índice $\frac{02}{01}$	Número índice $\frac{02}{00}$	Variación % $\frac{02}{01}$	Variación % $\frac{02}{00}$
Cantidad de infracciones en la calle San Martín	840	420	210				
Cantidad de infracciones en la calle Belgrano	50	150	450	3		200%	

a. En la calle Belgrano, en el año 2001 hubo 150 infracciones y en el año 2002 fueron 450. ¿En qué proporción aumentaron las infracciones? Comparen con el número índice $\frac{02}{01}$.

b. Teniendo en cuenta la respuesta del ítem anterior, el porcentaje de variación $\frac{02}{01}$ ¿no debería ser 300% en vez del 200%? ¿Por qué?

c. Completen la tabla.

d. Analicen los resultados de los números índice y los porcentajes de variación de la calle San Martín. Busquen la relación entre los resultados y el crecimiento o disminución de las infracciones. Compartan la respuesta con sus compañeros.

e. Realicen en sus carpetas dos gráficos de barras, uno para cada calle. Luego, respondan: ¿tuvo resultado favorable la incorporación de la cámara de fotomultas en esas calles?

9. Lean atentamente y respondan.

Se realizó una encuesta a los estudiantes de tercer año de una escuela para saber cuántas plantas tenían en sus casas. Las respuestas fueron:

0	2	1	3	0	0	1	1	2	3
1	1	2	4	2	1	4	0	0	1

a. Completen la tabla de frecuencias.

Cantidad de plantas	f (cantidad de alumnos)	fr	fr%	fa
0				
1				
2				
3				
4				
Total				

b. ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

c. ¿Cuántas plantas tiene la mayoría de los estudiantes?

d. Realicen un pictograma en sus carpetas.

50. Medidas de posición

▶ SABERES DINÁMICOS

Las medidas de posición nos permiten conocer diversas características de los datos recolectados de la variable estadística a analizar. Entre estas medidas se encuentran: el promedio o media, la mediana y la moda.

Para calcular el **promedio** o **media** (se escribe $\overline{x}$) se realiza la suma de todos los valores de la variable y se divide por la cantidad de elementos de la muestra.

En un parque de diversiones se registraron las edades de los ingresantes al Laberinto del terror *de la función de las 16 horas:*

36, 18, 20, 22, 26, 30, 34, 18, 20, 38, 20

Ordenados de menor a mayor:

18, 18, 20, 20, 20, 22, 26, 30, 34, 36, 38

$$\overline{x} = \frac{(18 \,.\, 2 + 20 \,.\, 3 + 22 + 26 + 30 + 34 + 36 + 38)}{11}$$

$$\overline{x} = \frac{282}{11}$$

$$\overline{x} = 25{,}63$$

La **moda** (se escribe m_o) es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. Puede haber más de una moda en una variable. En el ejemplo anterior, $m_o = 20$.

La **mediana** (se escribe m_e) es el valor de la variable que ocupa el lugar central. Para obtenerla, primero hay que ordenar todos los valores de menor a mayor.

18, 18, 20, 20, 20, 22, 26, 30, 34, 36, 38

$$m_e = 22$$

Si la cantidad de los elementos de la muestra es par, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

También se registró las edades de los ingresantes de la función de las 22 horas:

18, 26, 28, 30, 36, 40, 42, 48

$$m_e = \frac{30 + 36}{2}$$

$$m_e = 33$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cómo se puede reconocer la moda mirando un gráfico de barras o un pictograma?
   b. Cuando un docente calcula la nota final del trimestre, ¿qué medida de posición está calculando? ¿Cuáles son los valores de la variable?
   c. Se registraron las edades de 10 personas que ingresaron a ver una función. Propongan un registro posible, si se sabe que hay dos modas y la mediana es 25.

50. Medidas de posición

10. Calculen el promedio, la mediana y la moda en cada caso.

a. En un campamento se registró la cantidad de frutas que consumió por día cada niño:

0 2 3 2 1 2 2 2 0 3 5 2

$\bar{x}$ = ☐ m_o = ☐ m_e = ☐

b. Se preguntó a 10 personas que ingresaron a un edificio a qué piso se dirigían: 4 personas dijeron "al piso 1", 3 personas, "al piso 2" y otras 3 personas "al 3".

$\bar{x}$ = ☐ m_o = ☐ m_e = ☐

c. Se registraron las temperatura máximas de una localidad al cabo de una semana:

Temperatura (°C)	f (cantidad de días)	fa
18	3	3
26	2	5
30	2	7

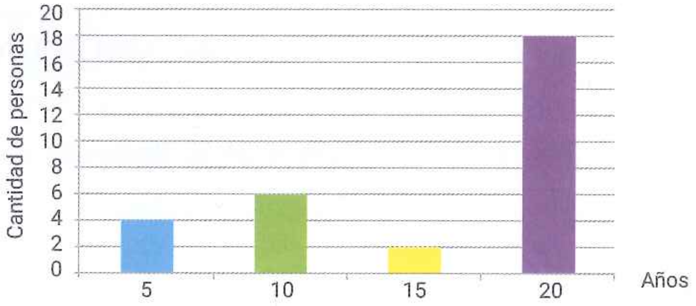
$\bar{x}$ = ☐

m_o = ☐

m_e = ☐

11. Observen el gráfico y resuelvan.

Se realizó una encuesta a conductores de motocicletas, a quienes se les preguntó: ¿cuántos años, desde su fabricación, piensan que tiene de vida útil el casco que utilizan para ir en moto: 5, 10, 15 o 20 años? Los resultados se volcaron en el siguiente gráfico.



a. ¿Cuántos motociclistas fueron encuestados?

b. Calculen el promedio, la mediana y la moda, y compartan con sus compañeros cómo lo hicieron.

c. Averigüen cuál es la vida útil de un casco de motocicleta. Compartan la información con sus compañeros. Discutan si piensan que se cumple con el período de cambio.

DinámicaMente

Lean atentamente y resuelvan.

En el colegio de Valentina, las notas de las evaluaciones de Matemática van de 0 a 100. Valentina tiene un promedio de 80 puntos en sus primeros cuatro exámenes. En el quinto examen obtuvo 60 puntos. ¿Cuál es el promedio de las notas de Valentina en Ciencias después de los cinco exámenes?

12. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se eligió al azar 30 personas de las 300 que asistieron al taller de Tecnología en un museo, y se les preguntó cuál consideran que es el mejor invento de la humanidad. Las respuestas se volcaron en la siguiente tabla:

Mejor invento de la humanidad	f	fr	fr%
La escritura	6		
El teléfono	10		
El automóvil	9		
La bombita de luz	5		
Total			

a. Indiquen la población, la muestra, la variable y de qué tipo es.

b. Completen la tabla.

c. Realicen un gráfico de barras.

d. Indiquen cuál o cuáles de las medidas de posición se pueden calcular en este caso y escriban su valor.

13. **Observen el gráfico y respondan.**

Se realizó un estudio para saber, al caer una tostada con mermelada, qué lado queda abajo. Los resultados se volcaron en el siguiente gráfico.

a. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?

b. ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

c. Completen la tabla.

Lado que cae la tostada	f	fr	fr%
Lado de la mermelada			
Lado libre			
Total			

d. Realicen un gráfico circular.

e. ¿Cuál es la moda y qué representa esta medida con respecto a la pregunta del estudio?

14. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se realizó una encuesta a 20 personas, a las que se les preguntó cuántos celulares activos había en sus hogares. Un 30% tiene 5; un 45%, 4 celulares y un 25%, 3 celulares.

a. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?

b. Completen la tabla.

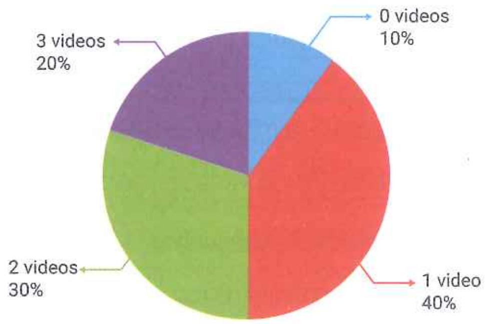
Cantidad de celulares	f	fr	fr%	fa
3				
4				
5				
Total				

c. Realicen un gráfico de barras.

d. Calculen el promedio, la mediana y la moda

15. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se quiere saber cuántos videos realizan los *influencers* en TikTok un cierto día del año 2018. Para esto se recolectó información de 200 *influencers* tomados al azar. Los resultados se volcaron en el siguiente gráfico.



a. Indiquen la población, la muestra, la variable y de qué tipo es.

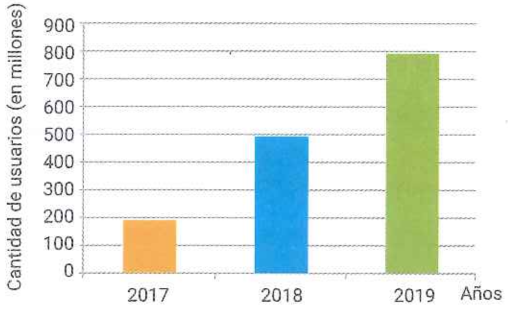
b. ¿Cuántos *influencers* publicaron 1 video en ese día?

c. ¿Cuántos *influencers* publicaron 2 o más videos en ese día?

d. Calculen el promedio, la mediana y la moda. Compartan con sus compañeros cómo realizaron cada cálculo.

16. **Lean atentamente y resuelvan.**

El siguiente es un gráfico que muestra la cantidad de usuarios que tenía TikTok en ciertos años.



a. Calculen el número índice $\frac{19}{18}$ y la variación porcentual $\frac{19}{18}$.

b. Patricio calculó que de 2017 a 2019 la cantidad de usuarios se cuadruplicó. Él dice que el número índice es 4 y la variación porcentual es del 400%. ¿Es cierto? ¿Cuál fue el error?

c. Si en el año 2020 TikTok hubiera mantenido la misma cantidad de usuarios que en 2019, sin realizar los cálculos indiquen cuál sería el número índice $\frac{20}{19}$ y la variación porcentual.

d. Si en el año 2020 la cantidad de usuarios hubiera bajado a la mitad, ¿cuál debería ser el número índice $\frac{20}{19}$ y la variación porcentual?

17. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se registró la cantidad de toneladas de materiales tecnológicos que llegan a los rellenos sanitarios. En 2019 fue de 25 toneladas y en 2020, de 35 toneladas.

a. Calculen el número índice $\frac{20}{19}$.

b. Calculen la variación porcentual $\frac{20}{19}$.

c. Escriban un posible título de una noticia sobre el tema donde figure la variación porcentual.

d. Realicen un pictograma de la cantidad de toneladas de materiales tecnológicos que llegaron a los rellenos en los años 2019 y 2020.

18. **Lean atentamente el encabezado de la siguiente noticia y completen la tabla.**

> **Un informe reveló que en 10 años creció 25% la matriculación en jardines de infantes. Entre 2007 y 2017 se matricularon 325 000 estudiantes más.**

Años	2007	2017	Índice 17/07	Variación % 17/07
Cantidad de estudiantes				

19. **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas.**

a. El precio de las compras realizadas en un supermercado es una variable cuantitativa continua. ☐

b. La suma de las frecuencias absolutas siempre es 1. ☐

c. La suma de las frecuencias relativas siempre es 100%. ☐

d. En un gráfico de barras se visualizan las frecuencias absolutas de los valores de la variable. ☐

e. El promedio, la mediana y la moda de una variable pueden coincidir. ☐

20. **Lean atentamente y respondan.**

En un club de ajedrez publicitan que los socios ganan, en promedio, 2 campeonatos por año. Si se miran las estadísticas, resulta que de los 10 socios, 1 solo ganó 20 campeonatos y los restantes, ninguno.

a. ¿Es cierto lo que dice la publicidad?

b. ¿Cuál es la moda?

c. ¿Cuál de las medidas de posición les parece la más representativa de la situación?

21. **Lean atentamente y respondan.**

La altura promedio de una muestra de 20 huevos era de 6,2 cm. Como se rompió uno, se los tuvo que volver a medir y la suma de las medidas dio 117,2 cm. ¿Cuánto medía el huevo que se rompió?

51. Intervalos y gráficos

▶ SABERES DINÁMICOS

Las variables que son cuantitativas continuas pueden tomar valores infinitos y por eso es conveniente agrupar los datos en intervalos de clases. Estos, en general, tienen la misma amplitud.

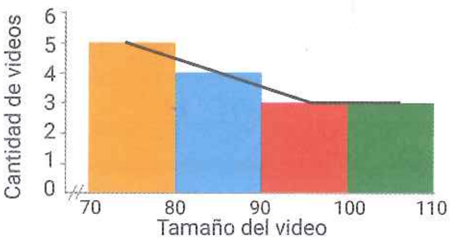
Se registró el tamaño en MB (megabyte) de 15 videos subidos en un cierto canal de YouTube.

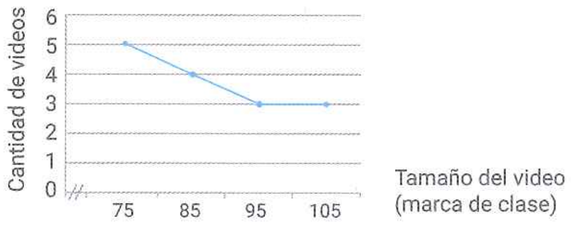
70,2	100,3	76,5	82,7	92,3
74,5	87,1	74,2	98,4	84,2
102,3	101	98,2	72	86,9

Los datos se pueden organizar en intervalos de clase de amplitud 10. Por ejemplo: [70;80)
Significa que son todos los videos cuyo tamaño están comprendidos entre 70 MB (incluido) hasta 80 MB (sin incluir).
Se denomina **marca de clase** (se escribe x_n) al punto medio de cada intervalo. Para calcular la marca de clase del intervalo anterior se hace $\frac{70+80}{2} = 75$.

x: tamaño del video	f	fr	fa	x_n: marca de clase
[70; 80)	5	$\frac{5}{15} = 0,333...$	5	$\frac{70+80}{2} = 75$
[80; 90)	4	$\frac{4}{15} = 0,266...$	9	$\frac{80+90}{2} = 85$
[90; 100)	3	$\frac{3}{15} = 0,2$	12	$\frac{90+100}{2} = 95$
[100; 110)	3	$\frac{3}{15} = 0,2$	15	$\frac{100+110}{2} = 105$

Para representar intervalos de clase se utilizan los gráficos llamados **histogramas**. Los rectángulos del gráfico son contiguos; si la amplitud de cada intervalo es la misma, tienen el mismo ancho y las alturas son las frecuencias absolutas. A partir de este gráfico se crea el llamado **polígono de frecuencias**. Se forma uniendo con segmentos los puntos medios de las partes más altas de los rectángulos del histograma (marcado en negro). Pero también se puede graficar sin utilizar el histograma, donde cada punto hace corresponder la marca de clase con las frecuencias absolutas del intervalo correspondiente. Y dichos puntos se unen con segmentos.





TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuál es la amplitud del intervalo [26; 32)?
   b. Si en el ejemplo, los intervalos se hubiesen tomado con amplitud 5, ¿serían distintos el histograma y el polígono de frecuencias?
   c. Expliquen con sus palabras cómo se realiza el cálculo de la marca de clase.

ACTIVIDADES

51. Intervalos y gráficos

22. Lean atentamente y resuelvan.
Se les preguntó a los estudiantes de 3.º año de una escuela la cantidad de publicaciones que tenían en la red social Instagram. Las respuestas fueron:

48	162	120	142	15
79	152	83	95	56
3	105	168	72	131
39	142	84	67	49

a. Completen la tabla.

x: cantidad de publicaciones	f	fr	fa	x_n: marca de clase
[0; 50)				
[50; 100)				
[100; 150)				
[150; 200]				

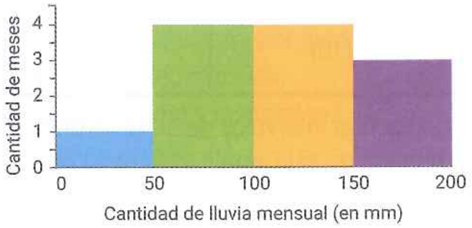
b. ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 150 publicaciones?

c. ¿Qué porcentaje de estudiantes tiene 150 o más publicaciones hechas?

d. Realicen un histograma y el polígono de frecuencias en sus carpetas.

23. Observen el histograma y respondan.

El servicio meteorológico realizó un histograma con los datos de la cantidad de lluvia caída mensualmente en el año 2019 en una localidad de San Isidro.



a. Completen la tabla de frecuencias con los datos del gráfico.

x: cantidad de lluvia mensual (en mm)	Cantidad de meses (f)	fr	fa	x_n: marca de clase

b. ¿Qué número da la suma de las frecuencias absolutas? ¿Por qué marca ese valor?

c. ¿Es posible que en un mes de ese año no haya llovido? ¿Y en dos meses? ¿Por qué?

d. ¿Cuántos meses llovió menos de 150 mm?

24. Lean atentamente y resuelvan.

Un estudio del año 2010 revela la cantidad de papel que consume una persona por año en su equivalente en árboles de 12 metros de altura. Por ejemplo, Bélgica consume por persona al año una cantidad de papel equivalente a 8,51 árboles. Los datos de varios países son:

8,51	7,28	6,83	6,35	5,83	5,67
5,57	5,54	5,37	5,24	5,18	4,89
4,48	4,18	3,74	2,87	2,21	1,81
1,69	1,29	1,21	0,67	0,23	0,16

a. Completen la tabla con los datos, eligiendo convenientemente los intervalos de clase. Realicen un polígono de frecuencias.

x: cantidad de árboles consumidos (en papel) por persona en 2010	Cantidad de países (f)	x_m: marca de clase

b. La población de Bélgica en el año 2010 fue de 11 000 638 personas. Calculen a cuántos árboles equivale el consumo de papel en ese país. ¿Qué opinan de esa cantidad?

c. Compartan con sus compañeros qué medidas toman o podrían tomar ustedes y sus familias para disminuir la cantidad de papel utilizado.

25. Lean atentamente y respondan.

En la aplicación Google Maps existe una función llamada horarios populares. Al seleccionar un cierto negocio o lugar se muestra un histograma de la cantidad de personas que concurren al lugar en función de los horarios. El siguiente histograma corresponde a un local un día sábado.

a. Una persona quiere ir al local y no desea demorar mucho en ser atendida. Indiquen tres franjas horarias que recomendarían.

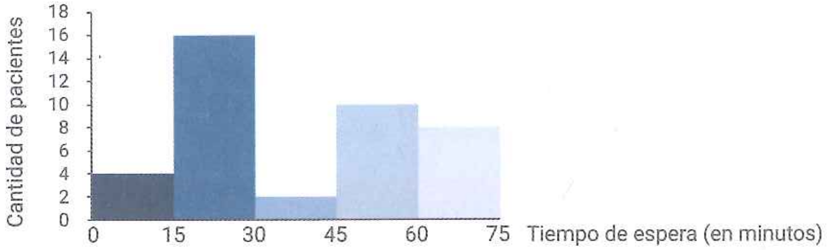
b. Si el dueño del negocio quiere poner más personal para evitar demoras en los clientes, ¿en qué horario debería agregarlo?

c. Investiguen de qué modo Google recauda la información para armar este histograma.

51. Intervalos y gráficos

26. Observen el siguiente gráfico y escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas.

El gráfico muestra el tiempo de espera que tuvieron los pacientes de una pediatra un día viernes.



a. La pediatra atendió 40 pacientes ese día. ☐

b. Los pacientes que esperaron menos de 30 minutos fueron el doble de los que esperaron una hora o más. ☐

c. La mayoría de los pacientes esperó menos de media hora. ☐

d. Un cuarto de los pacientes esperó 45 minutos o más, pero menos de 60 minutos. ☐

e. La frecuencia relativa de [30; 45) es de 0,05. ☐

f. La marca de clase del intervalo [60; 75) es de 67. ☐

27. Lean atentamente y resuelvan.

Se contabilizó la cantidad de caracteres utilizados en una muestra de 50 *tuit* de varias cuentas de Twitter. El 20% de los *tuits* tenía menos de 47 caracteres, el 30% de 47 a 93 caracteres (incluyendo el 47 y el 93) y un 50%, 94 caracteres o más. Tengan en cuenta que cada *tuit* no puede tener más de 140 caracteres.

a. Completen la tabla.

x: Cantidad de caracteres	Cantitad de *tuits* (f)	fr	fa	x_m: marca de clase

b. Comprueben que todos los intervalos propuestos en la tabla anterior tengan la misma amplitud. Si no es así, modifíquenlos.

c. Realicen el histograma en la carpeta.

52. Media y moda en intervalos

▶ SABERES DINÁMICOS

En una variable cuantitativa continua, donde los datos están agrupados en intervalos de clase, también es posible calcular las medidas de posición como la **media** (se escribe $\overline{x}$) y el **intervalo modal**.

Para el cálculo de la **media** se realiza la multiplicación de las marcas de clase de cada intervalo por su frecuencia absoluta, se suman y el resultado se divide por el tamaño de la muestra.

Se registraron los pesos de las mascotas que fueron atendidas en una veterinaria. Los datos fueron volcados en la siguiente tabla.

x: peso de las mascotas (kg)	f	x_n: marca de clase	$f \cdot x_n$
[0; 6)	15	3	45
[6; 12)	20	9	180
[12; 18)	5	15	75
Total	40		300

• Usando la tabla, la media se puede calcular:

Tamaño de la muestra

$$\overline{x} = \frac{300}{40}$$

Suma de las multiplicaciones de las marcas de clase por su frecuencia absoluta

$$\overline{x} = 7{,}5$$

• O simplemente con el cálculo:

$$\overline{x} = \frac{15 \cdot 3 + 20 \cdot 9 + 5 \cdot 15}{40}$$

$$\overline{x} = \frac{300}{40}$$

$$\overline{x} = 7{,}5$$

El **intervalo modal** es aquel intervalo de clase que tiene mayor frecuencia absoluta.
En el ejemplo anterior el intervalo modal es [6; 12).

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cómo reconocen el intervalo modal mirando un histograma?
   b. Una variable, ¿puede tener más de un intervalo modal? ¿En qué caso?
   c. ¿Cuándo es necesario calcular la marca de clase?

52. Media y moda en intervalos

28. Lean atentamente y resuelvan.

En el puesto de información turística de la ciudad de Bariloche se les preguntó a los turistas que visitaron el lugar cuántos días tenían pensado hospedarse allí. Los resultados fueron:

5	10	3	15	21	7
8	5	10	22	24	10
15	14	4	29	9	9
12	4	5	14	10	8

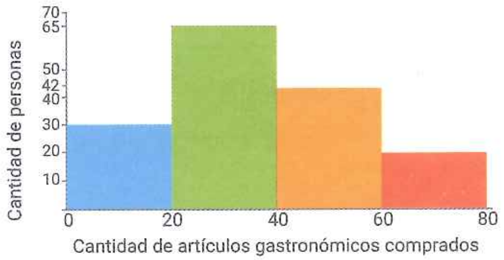
a. Completen la tabla.

x: cantidad de días en Bariloche	f	x_n: marca de clase	$f \cdot x_n$
[0; 10)			
[10; 20)			
[20; 30)			

b. Calculen la media y el intervalo modal.

29. Observen el gráfico y resuelvan.

En una exposición barrial de comidas se preguntó a un grupo de personas, al salir, cuántos artículos gastronómicos habían comprado y se elaboró el siguiente gráfico.



a. Completen la tabla.

x: cantidad de artículos gastronómicos	f	x_n: marca de clase	$f \cdot x_n$
Total			

b. ¿Cuál es la media de la cantidad de artículos gastronómicos comprados?

c. La mayoría del público, ¿qué cantidad de artículos compró?

d. Escriban un posible titular de una noticia referida a la exposición donde figuraría este gráfico. Deben usar los datos de la media o del intervalo modal.

Integración final

30. **Respondan.**

a. ¿Qué tipo de variable es el tiempo que tardan los deportistas en correr un maratón?

b. ¿Cómo se calcula la marca de clase de un intervalo de clases?

c. En el intervalo [38; 52), el 38 ¿está incluido en el intervalo? ¿Y el 52?

d. ¿Cuál es el intervalo que tiene inicio en el número 30 y marca de clase en 50?

e. Las alturas de las barras de un histograma, ¿coinciden con las frecuencias absolutas?

f. Una variable cuantitativa continua ¿puede tener más de un intervalo modal? ¿Y más de una media aritmética?

31. **Lean atentamente y respondan.**

Los estudiantes de sexto año venden rifas y así juntan dinero para su fiesta de egresados. Cada alumno tiene para vender 30 rifas, pero no llegaron a venderlas todas. Se anotaron cuántas vendió cada uno.

10	29	28	26	9	4	19
11	29	28	12	16	29	27
16	17	26	18	19	29	4

a. Completen la tabla.

x: rifas vendidas	f	fr	fa	X_n
[0; 10)				
[10; 20)				
[20; 30)				

b. ¿Cuál es la variable? ¿Cuál es la población?

c. ¿Cuántos estudiantes hay en el curso?

d. ¿Cuántas rifas en promedio vendieron?

e. ¿Cuál es el intervalo modal? ¿Es único?

f. Realicen un histograma.

32. **Observen la tabla y resuelvan.**

Se les preguntó a 30 alumnos de una escuela cuánto tiempo habían dormido esa noche.

x: tiempo que durmieron (horas)	Cantidad de alumnos
[5; 6)	17
[6; 7)	4
[7; 8)	6
[8; 9)	2
[9; 10)	1

a. ¿Cuántos durmieron menos de 8 horas?

b. ¿Cuál es el porcentaje de los que duermen 8 horas o más?

c. Calculen la media.

d. Pregunten a sus compañeros cuántas horas durmieron anoche, elaboren la tabla y calculen la media.

e. Investiguen cuántas horas recomiendan dormir en la adolescencia. Discutan con sus compañeros la importancia de dormir el tiempo adecuado.

33. **Resuelvan.**

Un estudio de mercado registró el precio del kilo de yerba de diferentes marcas en la Argentina.

a. Completen la tabla.

x: precio del kilo de yerba ($)	f	fr	fa	X_n	$f \cdot X_n$
[150; 200)	5				
[200; 250)	6				
[250; 300)	8				
[300; 350)	5				

b. ¿Cuál es la población, la muestra y la variable?

c. ¿Cuántas marcas de yerba fueron analizadas en este estudio?

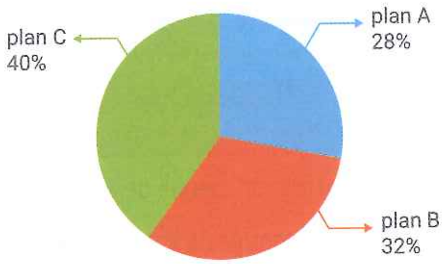
d. ¿Cuál es la media del precio del kilo de yerba?

e. ¿En qué rango de precio está el kilo de yerba en su mayoría?

f. Realicen un histograma con su polígono de frecuencias.

34. Observen el siguiente gráfico y resuelvan.

Se les preguntó a 150 clientes de una empresa de servicios audiovisuales qué plan habían contratado. Las respuestas se volcaron en el siguiente gráfico.



Se sabe que los que contrataron el plan A pagan mensualmente entre $320 y $370 dependiendo del valor del dólar de ese día. El plan B entre $420 y $480 y el plan C entre $100 y $150.

a. Completen la siguiente tabla estableciendo convenientemente los intervalos de clase de los precios.

x: costo del plan ($)	Cantidad de clientes

b. Calculen la media.

c. Elaboren un histograma.

35. Completen la siguiente tabla y resuelvan.

x: cantidad de agua (litros)	Cantidad de personas	fr	fa
[0; 1)	6		
[1; 2)			24
[2; 3)		0,30	
[3; 4]			40

a. Narren una posible situación que represente la tabla anterior y compártanla con sus compañeros.

b. Calculen la media y el intervalo modal.

36. Lean atentamente la siguiente noticia y respondan.

AFIP: se gestionó un promedio de 1 100 trámites web por día en el mes de abril.
La primera quincena del mes de abril se gestionaron entre 500 y 1 000 trámites online. En gran parte de la segunda quincena hubo un incremento de entre 1 000 a 2 000 trámites diarios, teniendo un pico en los tres últimos días del mes de 2 500.

a. Armen convenientemente los intervalos de clase y completen la tabla.

x: trámites diarios	f	fr	fa	x_n

b. Verifiquen que el promedio sea el que dice la noticia.

c. Indiquen cuál es el intervalo modal.

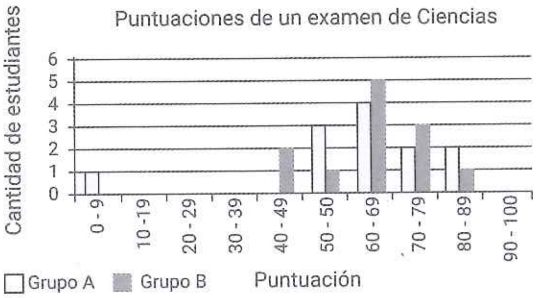
d. ¿Cuántos días del mes se gestionaron menos de 2 000 trámites?

e. ¿Cuál es el porcentaje de días en que se gestionaron 2 500 trámites?

f. Realicen un histograma.

37. Lean atentamente y resuelvan.

El gráfico muestra los resultados del examen de Ciencias tomado a dos grupos: grupo A y grupo B. La puntuación media del grupo A es de 62 y la media del grupo B es de 64,5.
Los estudiantes aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.



¿Qué información del diagrama pueden utilizar para explicar que no necesariamente el grupo B obtuvo mejores resultados que el grupo A?

9 Combinatoria y probabilidad

53. Factorial

▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **factorial** de un número natural n (se escribe n!) a la multiplicación del número n por cada uno de los anteriores hasta llegar al número 1.
Es decir: $n! = n \, . \, (n-1) \, . \, (n-2) \, . \, \ldots \, . \, 1$

El factorial de 4 es $4! = 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1 = 24$
El factorial de 6 es $6! = 6 \, . \, 5 \, . \, 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1 = 720$

Por definición $0! = 1$.

Propiedad del número factorial

- El factorial de un número es igual al producto de ese número por el factorial de su anterior.

Es decir: $n! = n \, . \, (n-1)!$

$$6! = 6 \, . \, (6-1)! = 6 \, . \, 5!$$
$$6! = 6 \, . \, 5 \, . \, 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, . \, 1$$

También es válido pensar que 6! = 6 . 5 . 4! o 6! = 6 . 5 . 4 . 3! y así sucesivamente hasta llegar a 1!

- Esta propiedad facilita la resolución de ciertos cálculos.

$$\frac{6! \, . \, 4!}{5! \, . \, 3!} = \frac{6 \, . \, \cancel{5!} \, . \, 4 \, . \, \cancel{3!}}{\cancel{5!} \, . \, \cancel{3!}} \rightarrow \textit{Simplificando}$$
$$= \frac{6 \, . \, 4}{1}$$
$$= 24$$

Y también facilita la resolución de ecuaciones.

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 8 \rightarrow \textit{sabiendo que } (n+2)! = (n+2) \, . \, (n+1)!$$
$$\frac{(n+2) : \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = 8 \rightarrow \textit{simplificando}$$
$$n + 2 = 8 \rightarrow n = 6$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es posible calcular (−5)!?
   b. ¿Cuál es el resultado de 1!? ¿Y de 0!?
   c. Escriban el número 120 como producto entre un número natural y el factorial de un número.

53. Factorial

1. Hallen el resultado de los siguientes cálculos, cuando sea posible.

a. $5! =$ ______

b. $3 \, . \, 4! =$ ______

c. $(-2)! =$ ______

d. $(-3) \, . \, 3! =$ ______

e. $2! + 1! =$ ______

f. $0! - 3! =$ ______

2. Simplifiquen y resuelvan.

a. $\dfrac{12!}{10!} =$ ______

b. $\dfrac{20!}{5! \, . \, 19!} =$ ______

c. $\dfrac{3! \, . \, 4!}{5!} =$ ______

d. $\dfrac{6! \, . \, 8! \, . \, 2!}{5! \, . \, 9! \, . \, 0!} =$ ______

e. $\dfrac{1! \, . \, 3! \, . \, 14!}{13! \, . \, 5!} =$ ______

f. $\dfrac{70! \, . \, 29!}{68! \, . \, 30!} =$ ______

g. $\dfrac{2!}{(7-5)!} =$ ______

h. $\dfrac{(7-3)! \, . \, 8!}{5! \, . \, 9!} =$ ______

3. Simplifiquen las siguientes expresiones todo lo posible.

a. $\dfrac{n! \, . \, (n+1)!}{(n+2)!} =$ ______

b. $\dfrac{(n+5)! \, . \, n}{(n+4)!} =$ ______

c. $\dfrac{(n-4)!}{(n-3)!} =$ ______

d. $\dfrac{(n-2)! \, . \, (n+1)}{(n-3)!} =$ ______

4. Hallen el valor de n de las siguientes ecuaciones.

a. $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!} = 4$

b. $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 6$

c. $\dfrac{(n-2)!}{(n-1)!} = 1$

d. $\dfrac{(n+3)! \, . \, n!}{(n+2)! \, . \, (n+1)!} = 2$

e. $\dfrac{(n+4)! \, . \, n!}{(n+3)! \, . \, (n-1)!} = 12$

f. $\dfrac{(n+2)! \, . \, (n-3)!}{(n+1)! \, . \, (n-4)!} = 6$

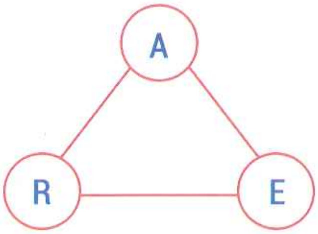
54. Permutaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

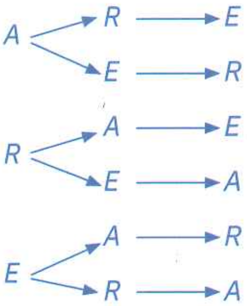
El cálculo combinatorio establece métodos de conteo que ayudan a formar y contabilizar las distintas agrupaciones que se pueden realizar con los elementos de un conjunto.

Si estas agrupaciones difieren en el orden de los elementos (importa el orden) se llaman **permutaciones**.

¿De cuántas formas diferentes se pueden combinar las tres letras que figuran en el dibujo, sin repetirlas?



Para visualizar mejor la situación se utilizan los diagramas de árbol.



Se pueden formar 6 combinaciones diferentes.

Para la primera letra hay 3 opciones, para la segunda, 2 y para la tercera, 1 opción.
Por lo tanto, el cálculo es: $3 . 2 . 1 = 6$
Este cálculo coincide con $3!$

Para calcular **permutaciones de n elementos** se debe cumplir que:

- Se toman todos los elementos (todos los elementos están en las agrupaciones que se forman; en el ejemplo anterior las letras A - R - E están en todas las agrupaciones).
- No se repiten elementos (solo hay una A, una R y una E).
- Importa el orden de los elementos (al cambiar el orden se forman diferentes combinaciones).

Entonces el cálculo es: $P_n = n!$

Mateo, su madre y tres amigos tienen reservados cinco asientos en una fila de un teatro. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse?
Son cinco elementos y son tomados todos, no se pueden repetir individuos e importa el orden en que se sientan; es una permutación, entonces, la cantidad de formas diferentes en que pueden sentarse es $P_5 = 5! = 120$.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Se quiere calcular cuántos conjuntos diferentes se pueden formar con una remera, dos pantalones y un zapato. ¿Importa el orden de los elementos? ¿Es una permutación?
   b. Con cinco colores disponibles se quiere saber cuántas mezclas de tres colores se pueden hacer (con una gota de cada color). Expliquen por qué esta situación no es una permutación.
   c. Planteen una situación que sea una permutación.

ACTIVIDADES

54. Permutaciones

5. Marquen con una X las situaciones que corresponden a permutaciones. Expliquen las respuestas.

a. Con las letras de nuestro abecedario, ¿cuántas palabras de 5 letras se pueden formar? ☐

b. Cinco personas se postularon como presidente y ayudante de mesa. ¿De cuántas maneras distintas puede resultar la elección? ☐

c. Cuatro personas desean ingresar a un restaurante. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ubicar en la fila para ingresar? ☐

d. Seis artistas van a actuar en un bar. Si cada uno hace un solo show, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las actuaciones? ☐

e. En una clase de Educación Física con 10 alumnos, la profesora quiere formar grupos de 2 estudiantes. ¿De cuántas formas distintas pueden agruparse? ☐

6. Respondan.

a. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los números 7, 8 y 9?

b. ¿Cuántos números de cinco cifras diferentes se pueden armar con los dígitos pares? ¿Y con los impares?

c. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden crear con los dígitos primos?

7. Lean atentamente y respondan.

Nahuel y Martín quieren ir al cine, a la plaza, al kiosco y a la casa de Tobías.

a. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacer la recorrida?

b. A último momento se acordaron que tienen que pasar por la librería a buscar el libro de matemática que habían comprado. ¿De cuántas formas diferentes pueden realizar la nueva recorrida?

c. Comparen los resultados de los ítems anteriores. ¿En qué proporción aumentó la cantidad?

8. Calculen la cantidad de libros que hay, sabiendo los posibles ordenamientos distintos.

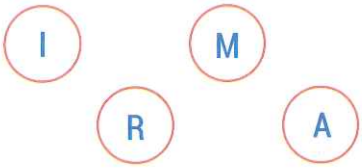
a. 6 ______ b. 720 ______ c. 40 320 ______ d. 2 ______

55. Variaciones

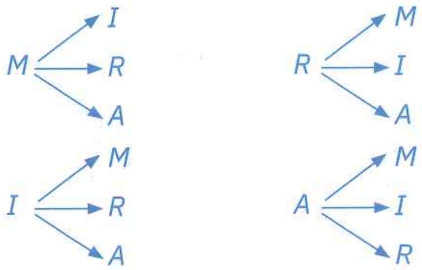
▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **variaciones de m elementos, tomados de a n,** a la cantidad de grupos de n elementos que se pueden formar con los m elementos. En una variación el orden de los elementos importa; es decir, un grupo puede diferir de otro en el orden de los elementos o por tener elementos distintos.

¿Cuántas combinaciones de dos letras diferentes, sin repetirlas y en orden, se pueden formar con las letras del dibujo?



Para visualizar la situación se realiza un diagrama de árbol.



Se pueden formar 12 combinaciones diferentes.

Para la primera letra hay 4 opciones y para la segunda, 3 opciones.
Por lo tanto, el cálculo es: 4 . 3 = 12.

Se escribe $V_{④②}$ = 4 . 3 = 12 y se lee "variaciones de 4 elementos tomados de a 2".

Cantidad total de elementos del conjunto. (④) — **Cantidad de elementos de los grupos.** (②)

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/var * para mirar un video donde se explica otro ejemplo de variaciones.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=Q3jNtb_ORCO

Para calcular **variaciones de m elementos, tomados de a n**, se debe cumplir que:
- En los grupos no se pueden repetir elementos.
- El orden de los elementos de los grupos importa.

Se utiliza la siguiente fórmula: $V_{m,n} = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

En el ejemplo anterior, si se utiliza la fórmula, el cálculo es:

$$V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2!}{2!} \longrightarrow \text{simplificando} = 4 \,.\, 3 = 12$$

Se obtiene el mismo resultado que usando el diagrama de árbol.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si con las letras del ejemplo se desea formar combinaciones de tres letras diferentes, ¿cuántas se pueden crear?
   b. ¿Se puede calcular $V_{3,5}$? ¿Por qué? ¿Cómo debe ser m respecto a n?
   c. Expliquen la siguiente afirmación.

   "La fórmula para calcular las variaciones $V_{m,n} = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ es igual a: m . (m − 1) . (m − 2) . .... . (m − n + 1), en la cual hay n factores".

55. Variaciones

9. Calculen las siguientes variaciones (utilicen la propiedad del factorial para facilitar el cálculo).

a. $V_{7,2}$ =

c. $V_{6,5}$ =

b. $V_{10,5}$ =

d. $V_{4,4}$ =

10. Reúnanse en grupos y analicen el resultado del ítem d de la actividad anterior. Luego, indiquen a qué es igual $V_{m,n}$ cuando m = n. Compartan sus opiniones con el resto de los compañeros.

11. Lean atentamente la explicación y resuelvan utilizando la calculadora científica.

Para realizar el cálculo, por ejemplo, $V_{6,2}$ en una calculadora científica hay que presionar las siguientes teclas: 6 nPr 2 =

a. $V_{14,5}$ =

b. $V_{9,7}$ =

c. $V_{50,2}$ =

d. $V_{8,7}$ =

12. Calculen el valor de n.

a. $V_{8,n}$ = 1 680

b. $V_{9,n}$ = 9

13. Resuelvan las siguientes situaciones expresando el cálculo como $V_{m,n}$.

a. En un sorteo realizado en Instagram, Martín tiene que arrobar a dos amigos para que el primero pueda ganar cuatro entradas al cine y el segundo, dos entradas. Si tiene 42 amigos, ¿de cuántas formas diferentes puede hacerlo?

b. En un curso de 22 alumnos, la docente debe elegir un presidente, un vicepresidente y un ayudante de mesa para las elecciones. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir a estos tres alumnos?

c. Con las letras de la palabra video, ¿cuántas combinaciones de cuatro letras distintas se pueden formar?

d. Con los dígitos pares, ¿cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar?

14. Reúnanse en grupos e inventen una situación y una pregunta cuya respuesta sea el resultado de $V_{14,3}$. Compartan con el resto de sus compañeros y discutan si lo que pensó cada grupo es o no una variación.

56. Combinaciones

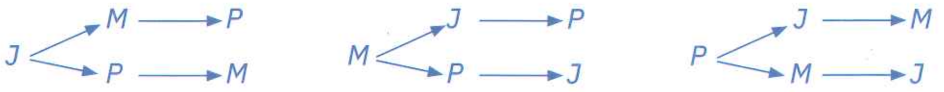
▶ SABERES DINÁMICOS

Se denomina **combinaciones de m elementos tomados de a n** a la cantidad de grupos de n elementos que se pueden formar con m elementos teniendo en cuenta que el orden de los elementos no importa. Es decir, un grupo difiere de otro en los elementos y no en el orden en que figuran los mismos.

A Lucas le regalaron tres vouchers extras para ir a cenar en un restaurante. Debe elegir a tres de sus cinco amigos: Sebastián (S), Joaquín (J), Mateo (M), Rodrigo (R) y Pablo (P). ¿De cuántas formas diferentes puede ir acompañado Lucas a la cena?

Para realizar el cálculo se podría averiguar la cantidad de variaciones posibles de los 5 elementos tomados de a 3. $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$

Hay que tener en cuenta que en este cálculo se están considerando grupos con los mismos amigos, pero en distintos orden. Y en este ejemplo no importa el orden, pues es igual que Lucas vaya a cenar con Joaquín, Mateo y Pablo (JMP) que con Mateo, Pablo y Joaquín (MPJ). Los grupos que están formados por estos tres amigos, y por lo tanto son iguales, son:



Esto sucede con cada grupo de tres amigos distintos. Todos están repetidos 3! = 3 . 2 . 1 = 6 (permutación de 3 elementos). Por lo tanto, hay que dividir por 6 la cantidad de variaciones: $\frac{60}{6!} = 10$.
Entonces, Lucas puede ir a cenar acompañado de 10 formas diferentes.

Para calcular **combinaciones posibles de m elementos tomados de a n,** se debe cumplir que:

- En los grupos no se puede repetir elementos.
- No importa el orden de los elementos de los grupos.

Se utiliza la siguiente fórmula:

Se escribe $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{n!}$ y se lee "combinaciones de m elementos tomados de a n".

Cantidad total de elementos del conjunto. (m)

Cantidad de elementos de los grupos. (n)

Número combinatorio

Se denomina **número combinatorio** a la expresión: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,.\,n!}$

Áreas dinámicas [Matemática y Prácticas del Lenguaje]

En 1961 se publicó un libro llamado "Cien mil millones de poemas", de Raymond Queneau. Este libro propone 10 sonetos, uno en cada hoja, pero con las hojas divididas en catorce tiras horizontales, con un verso en cada tira. Los versos son combinables y riman entre sí, dándose 10^{14} combinaciones posibles, es decir, cien billones de poemas. Este libro es el más largo del mundo y solo tiene diez páginas.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Responda y expliquen las respuestas.
   a. Calculen $\binom{8}{3}$.
   b. Resuelvan $C_{7,2}$ y $\binom{7}{2}$ y verifiquen si se obtiene el mismo resultado.
   c. Den un ejemplo de una situación que corresponda a una combinación. Tengan en cuenta que no debe importar el orden de los elementos.

ACTIVIDADES

56. Combinaciones

15. **Calculen:**

a. $C_{10,3}$ = ____________ c. $C_{6,6}$ = ____________

b. $\binom{3}{2}$ = ____________ d. $\binom{9}{8}$ = ____________

16. **Reúnanse en grupos y analicen el resultado del ítem c de la actividad anterior. Luego, indiquen a qué es igual $C_{m,n}$ cuando m = n. Compartan sus opiniones con el resto de los compañeros.**

17. **Lean atentamente la explicación y resuelvan utilizando la calculadora científica.**

Para realizar el cálculo, por ejemplo $C_{8,4}$, en una calculadora científica hay que presionar las siguientes teclas: 8 nCr 4 =

a. $C_{9,5}$ = b. $C_{20,6}$ = c. $C_{60,58}$ = d. $C_{4,3}$ =

18. **Resuelvan las siguientes situaciones expresando el cálculo como $C_{m,n}$.**

a. Valentino quiere armar una ensalada y tiene que elegir 4 de un total de 8 vegetales. ¿Cuántas ensaladas diferentes puede formar con 4 vegetales distintos?

b. Una *influencer* quiere hacer una publicación donde solo puede colocar 30 *hashtags* de los 32 que tiene. ¿De cuántas formas diferentes puede seleccionar 30 *hashtags* de los 32?

c. Martín sacó 20 fotos a su auto y solo quiere imprimir el 60% de las fotos para colocarlas en su taller. ¿De cuántas formas diferentes puede elegir esas fotos?

d. Marina está preparando su fiesta de 15 años. Son 50 invitados y tiene que ubicar a 6 de ellos en la mesa principal. ¿De cuántas formas diferentes puede armar la mesa?

e. La mamá de Juliana compró una bolsa con 12 semillas de plantas distintas. Si Juliana saca de la bolsa 5 semillas para plantarlas en una maceta, ¿cuántas combinaciones posibles de semillas puede extraer de la bolsa?

DinámicaMente

Si se tiene n + 1 elementos y se quiere armar grupos de n elementos, donde el orden de los elementos no importa, ¿cuántos grupos diferentes se pueden formar?

19. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas.

a. $0! = 0$

b. $\frac{6!}{4!} = 6 . 5$

c. En una permutación el orden de los elementos de un grupo importa.

d. En una variación el orden de los elementos de un grupo no importa.

e. En una combinación el orden de los elementos de un grupo no importa.

f. En una variación, si m es igual a n es una permutación.

20. Indiquen si las siguientes situaciones corresponden a una permutación, a una variación o a una combinación. Expliquen las respuestas.

a. Con las letras de la palabra león, ¿cuántas combinaciones de 4 letras distintas se pueden formar?

b. Utilizando solo vocales y sin repetirlas, ¿cuántas contraseñas de 3 letras se pueden formar?

c. En una biblioteca hay 12 libros y Juana debe seleccionar dos libros para leer; ¿cuántos grupos diferentes de libros puede seleccionar?

d. Malena tiene 5 libros y los quiere acomodar en un estante; ¿de cuántas formas diferentes puede acomodarlos?

21. Resuelvan los siguientes cálculos, cuando sea posible. Si no es posible, expliquen por qué.

a. $P_8 =$

b. $V_{3,5} =$

c. $V_{14,3} =$

d. $V_{6,6} =$

e. $C_{6,3} =$

f. $C_{25,22} =$

g. $C_{7,2} =$

h. $\binom{7}{0} =$

i. $\binom{32}{32} =$

j. $\binom{15}{13} =$

22. Resuelvan las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{n!}{(n-1)!} = 15$

b. $\frac{(n-8)!}{(n-7)!} = 1$

c. $\frac{(n-7)! . n!}{(n-6)! . (n-1)!} = 2$

d. $\frac{(n+5)! . (n-3)!}{(n-4)! . (n+4)!} = 0$

23. Resuelvan.

En un restaurante, a la pizza de tomate y queso se le pueden agregar cuatro tipos de ingredientes: panceta, jamón, morrones y huevo. Mauro quiere encargar una pizza con dos ingredientes adicionales. ¿Cuántas combinaciones diferentes podría seleccionar Mauro?

24. Lean atentamente y respondan.

En una clase de 20 alumnos se desea:

a. Elegir cuatro alumnos para que hablen con el director de la escuela. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden seleccionar?

b. Seleccionar un presidente, un vicepresidente y un suplente para representar al curso. ¿De cuántas formas diferentes se puede formar este trío?

c. Formar un grupo de 5 alumnos. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar?

25. Respondan.

En un parque se organizó la feria de las heladerías. Los *stands* se ubicaron de la siguiente forma:

a. Si hay solo 2 heladerías que tienen helado de súper dulce de leche, ¿cuántos pares de heladerías pueden ser?

b. Si una persona quiere desayunar, comer el postre del almuerzo y merendar en 3 diferentes heladerías del lugar, ¿cuántos recorridos distintos podría realizar?

26. Resuelvan.

A Lourdes le regalaron 5 entradas para ir al teatro: una entrada para ella y 4 acompañantes.

a. Si elige a 4 de sus 12 amigas, ¿de cuántas formas diferentes puede ir acompañada?

b. Si quiere ir con su mamá, papá y dos amigas, ¿de cuántas maneras distintas puede ir acompañada?

c. Si ya eligió a las 4 personas y las entradas tienen número de asiento, ¿de cuántas formas distintas puede repartir las entradas, teniendo en cuenta la suya?

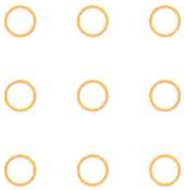
27. Lean atentamente y respondan.

Maximiliano quiere colocarle una contraseña a su celular. Tiene tres opciones posibles: una contraseña de 6 dígitos numéricos distintos, de 6 letras distintas o un patrón de 6 puntos (con 9 puntos).

a. ¿Cuántas contraseñas de 6 dígitos distintos puede formar Maxi utilizando los números del 0 al 9?

b. ¿Cuántas contraseñas de 6 caracteres distintos puede formar utilizando las letras del abecedario?

c. ¿Cuántos patrones de 6 puntos distintos puede formar con los 9 puntos?



d. ¿Cuál les parece el método de contraseña más seguro? ¿Por qué?

28. Reúnanse en grupos, tengan en cuenta la actividad anterior y respondan.

Maximiliano dice que si en las contraseñas de 6 letras distintas combina letras minúsculas y mayúsculas, tiene el doble de contraseñas posibles. ¿Están de acuerdo? Expliquen la respuesta.

29. Resuelvan y expliquen los cálculos realizados.

De un grupo de 21 fotos de una fiesta de 15 años, se quiere:

a. Elegir 8 para subir a Google fotos. ¿Cuántos álbumes diferentes se pueden formar?

b. Imprimir 12 fotos. ¿Cuántos grupos diferentes de fotos se pueden imprimir?

c. Elegir 4 para subir a los estados de Whatsapp. ¿Cuántos estados diferentes se pueden formar?

30. Lean atentamente, resuelvan e indiquen si son permutaciones, variaciones o combinaciones.

Gonzalo tiene latas de pintura de color rojo, azul, blanco, verde y amarillo, para pintar la pared de su pieza.

a. Si pinta la pared formando 3 franjas horizontales de colores distintos, ¿de cuántas formas distintas puede pintar la pared?

b. Si forma 5 franjas horizontales de colores diferentes, ¿de cuántas formas distintas puede decorar la pared?

c. Si quiere pintar la primera franja de color verde, y luego 4 franjas de otros colores, ¿de cuántas formas distintas puede quedar la pared?

d. Si desea tomar dos latas enteras de 2 colores diferentes y unirlos para formar otro color, ¿cuántos colores distintos podría formar?

e. Si toma la lata de color blanco y la quiere mezclar con las latas de otros 2 colores, ¿cuántos colores distintos puede formar?

31. Reúnanse en grupos, lean atentamente y respondan.

Marcos piensa que si hay 10 personas y se forma un grupo de 4, existe la misma cantidad de combinaciones posibles que si se formara un grupo de 6. Al igual que si son 50 personas y se forma un grupo de 2, existe la misma cantidad de combinaciones posibles que si se formara un grupo de 48.

a. Verifiquen si lo que dice Marcos es cierto. Escriban otro ejemplo.

b. ¿Qué relación encuentran?

c. Compartan con sus compañeros la respuesta anterior.

57. Probabilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **experimento** es **aleatorio** si no se puede saber de forma anticipada cuál será el resultado, sino que depende del azar. Lanzar un dado, sacar una carta de un mazo de cartas sin mirar, son experimentos aleatorios, pues no se puede saber de forma anticipada qué número se obtendría en el dado o qué carta saldría en el mazo.

En contraposición, hay experimentos que se denominan determinísticos, no dependen del azar. Sumar los números de un dado común y contar la cantidad de figuras que hay en un mazo de cartas españolas no son experimentos aleatorios.

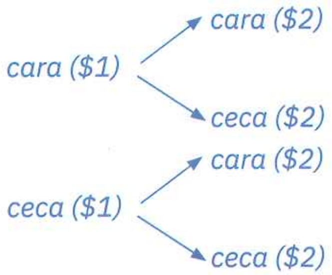
Se llama **suceso** a cada uno de los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, que salga un dos en el dado o un rey de espadas en el mazo de cartas.

El conjunto de todos los sucesos del experimento se llama **espacio muestral**. En algunos casos, para determinarlo se puede realizar un diagrama de árbol o una tabla de doble entrada.

Experimento: lanzar primero una moneda de un peso y luego otra de dos pesos.

Espacio muestral: (cara, cara); (cara, ceca); (ceca, cara); (ceca, ceca) → cada elemento es un suceso.

Utilizando un diagrama de árbol



Utilizando una tabla

	Cara ($2)	Ceca ($2)
Cara ($1)	cara ($1), cara ($2)	cara ($1), ceca ($2)
Ceca ($1)	ceca ($1), cara ($2)	ceca ($1), ceca ($2)

De cada suceso del experimento aleatorio se puede calcular la **probabilidad** de que este ocurra. Ese número puede ser 0, 1 o cualquier número racional comprendido entre 0 y 1. En general, la probabilidad de que ocurra un suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}}$$

La probabilidad del suceso (cara, cara) que sería obtener dos caras al lanzar las dos monedas es:

$$P\,(\text{dos caras}) = \frac{1}{4}$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué significa que un suceso tenga probabilidad 0?
   b. En el ejemplo de lanzar las monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener una ceca y una cara sin importar cuál moneda sea?
   c. Den otro ejemplo de experimento aleatorio y escriban su espacio muestral.

57. Probabilidad

32. Escriban el espacio muestral de cada experimento aleatorio, teniendo en cuenta si es importante el orden de los elementos de cada suceso o no.

a. Se arroja primero un dado y luego una moneda.

b. En una caja hay cinco papeles iguales y en cada uno escrita una vocal. Se sacan dos papeles juntos.

c. Se arrojan a la vez tres monedas.

33. Calculen la probabilidad de los siguientes sucesos referidos a los experimentos de la actividad anterior.

a. La probabilidad de que salga un 2 y una cara.

La probabilidad de que salga un número par y ceca.

b. La probabilidad de sacar la A y la O.

La probabilidad de sacar la U.

c. La probabilidad de que las tres monedas caigan en cara.

La probabilidad de que al menos una moneda caiga en ceca.

34. Resuelvan.

Se arroja un dado verde y otro azul.

a. Completen el espacio muestral utilizando la tabla. Tengan en cuenta el ejemplo.

	1	2	3	4	5	6
1		(1;2)				
2						
3						
4						
5						
6						

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en ambos dados el mismo número?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en el dado verde un número par?

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un número impar?

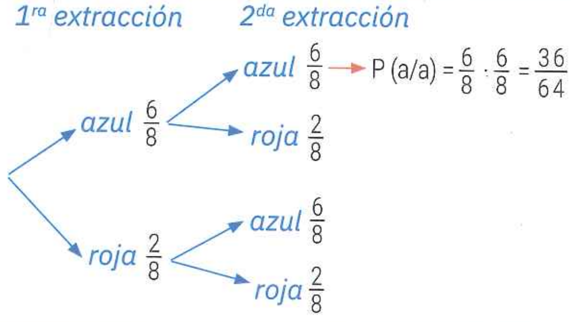
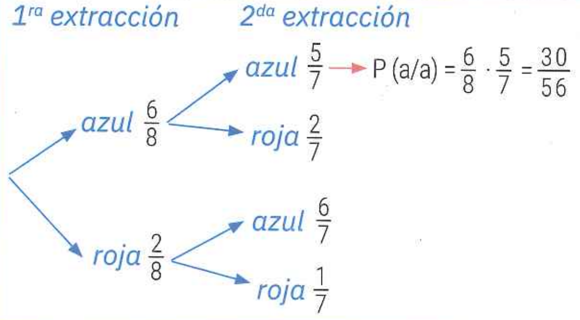
58. Probabilidades condicionales

▶ SABERES DINÁMICOS

En los experimentos aleatorios la probabilidad de un cierto suceso depende de la forma de realización del experimento y de la información que se tiene.

Experimento: en una caja hay 8 pelotas: 6 azules y 2 rojas. Se extraen al azar una pelota y luego otra, y se quiere calcular la probabilidad de que ambas sean azules.

Hay dos formas de realizar el experimento:

Con reposición	Sin reposición
Se saca la primera pelota y se devuelve a la caja para realizar la segunda extracción. Para el cálculo de la probabilidad se puede realizar un diagrama de árbol y colocar en cada flecha las probabilidades de cada suceso.	Se saca la primera pelota y no se devuelve a la caja para realizar la segunda extracción. Como no se repone la pelota de la primera extracción, en la segunda hay solo 7 pelotas y dependiendo de qué color fue la primera pelota, quedarán 5 o 6 pelotas azules en la caja.
	
En este caso, los dos sucesos (sacar una pelota azul en la primera extracción y sacar una pelota azul en la segunda extracción) son independientes, porque la probabilidad de que ocurra el segundo suceso no depende de lo que ocurre en el primero. La probabilidad de que ambas sean azules es: $P(\text{azul/azul}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{36}{64}$	En este caso, los dos sucesos son dependientes y se dice que es una **probabilidad condicionada**, porque la probabilidad depende de lo que salga en la primera extracción. $P(\text{azul/azul}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56}$ Se lee "probabilidad de obtener 2 azules si en la primera extracción se obtuvo azul".

Los sucesos también se pueden clasificar en excluyentes, no excluyentes y complementarios.

- Dos sucesos se denominan **excluyentes** cuando no pueden ocurrir a la vez y, por el contrario, si pueden darse a la vez, son **no excluyentes**.
- Un suceso es **complementario o contrario** de otro si está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no forman parte del otro. Por ende, dos sucesos complementarios siempre son excluyentes.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En el ejemplo de la caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar la primera pelota azul y la segunda roja, si se hace con reposición? ¿Y si se hace sin reposición?
   b. En el experimento "lanzar un dado", nombren dos sucesos que sean excluyentes y otros dos que no lo sean.
   c. En el experimento "lanzar un dado", nombren dos sucesos complementarios y calculen sus probabilidades. Luego, sumen las probabilidades. ¿Siempre las sumas de probabilidades de sucesos complementarios dan ese valor?

ACTIVIDADES

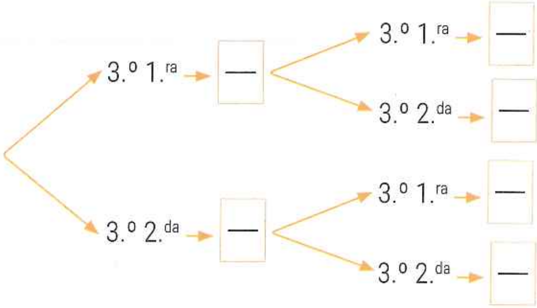
58. Probabilidades condicionales

35. Lean atentamente y resuelvan.

Los estudiantes de tercero deben elegir un representante y un organizador de la Fiesta de la Primavera. Realizarán un sorteo con los siete postulantes (cuatro de 3.º 1.ra y tres de 3.º 2.da) colocando papeles con sus nombres en una caja. El primer papel que se extraiga corresponde al representante y el segundo, al organizador. Completen los diagramas de árbol. Luego, calculen las probabilidades pedidas.

a. Cada estudiante puede desarrollar las dos tareas.

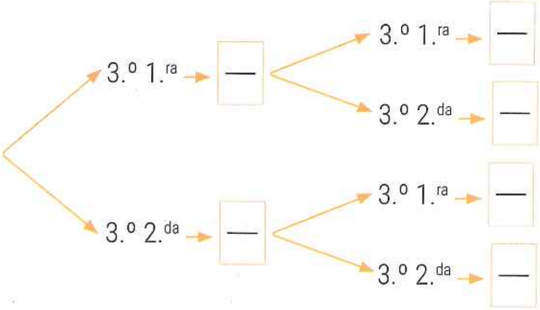
Representante Organizador



- P (ambos de 3º 1.ra) = —
- P (repres. de 3º 2.da/org. de 3º 1.ra) = —
- P (repres. no sea de 3º 1.ra) = —

b. Cada estudiante puede desarrollar solo una tarea.

Representante Organizador



- P (ambos de 3º 1.ra) = —
- P (repres. de 3º 2.da/org. de 3º 1.ra) = —
- P (repres. no sea de 3º 1.ra) = —

36. Respondan.

Marcela tiene en su billetera 4 billetes doblados de igual forma: uno de $20, uno de $50 y dos de $100.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que saque al azar primero un billete de $100?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que primero extraiga al azar el billete de $20 y luego, del resto de los billetes, saque el de $50?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que saque al azar primero un billete de $100 y luego, el otro de $100?

d. Si debe pagar $150, ¿cuál es la probabilidad de que saque el dinero justo extrayendo dos billetes al azar?

37. Reúnanse en grupos y resuelvan.

De un mazo de 48 cartas españolas se saca una carta al azar. Calculen las probabilidades de los sucesos e identifiquen un par de sucesos excluyentes y un par de sucesos no excluyentes.

a. P (rey de oros) =

b. P (figura) =

c. P (un 3 o un 4) =

d. P (menor que 5) =

e. P (que no sea el rey de oros) =

Integración final

38. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas.

a. El espacio muestral de lanzar un dado tiene 7 elementos. ☐

b. La probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado es de $\frac{1}{2}$. ☐

c. La suma de las probabilidades de cada suceso del espacio muestral da 2. ☐

d. La probabilidad de un suceso puede dar $-\frac{1}{4}$. ☐

e. La suma de dos sucesos complementarios da 1. ☐

f. Dos sucesos complementarios son siempre no excluyentes. ☐

39. Resuelvan.

Se arrojan un dado y una moneda.

a. Escriban el espacio muestral utilizando un diagrama de árbol o una tabla.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 y cara?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par y ceca?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que salga ceca?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo?

f. ¿Qué tipo de sucesos son b y d?

g. ¿Qué tipo de sucesos son b y e?

40. Resuelvan.

Tatiana y sus amigos están jugando a la siguiente ruleta. Le toca hacer girar una vez la ruleta a Tatiana.

a. Escriban sucesos que tengan como probabilidad: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$.

b. Escriban dos sucesos que sean excluyentes.

c. Escriban dos sucesos que sean no excluyentes.

41. Lean atentamente y resuelvan.

Los padres de Martín colocan papelitos en una caja con las tareas del hogar que hay que hacer. Él y su hermana deben sacar un papelito cada uno y realizar la tarea que les toque.
En la caja hay tres papelitos: "ordenar ropa", "limpiar pieza", "limpiar comedor". Le corresponde a Martín sacar el primer papelito y debe volver a ponerlo en la caja. Si los dos sacan el mismo papel, deben hacer la tarea en conjunto.

a. Armen un diagrama de árbol con el espacio muestral del experimento.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Martín tenga que ordenar la ropa y su hermana, limpiar el comedor.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que solo a Martín le toque limpiar la pieza?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que Martín y su hermana limpien juntos el comedor?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que hagan una tarea en conjunto.

f. ¿Cuál es el suceso complementario al del ítem anterior?

g. Nombren dos sucesos de los ítems anteriores que sean no excluyentes.

h. Nombren dos sucesos de los ítems anteriores que sean excluyentes.

42. Lean atentamente y resuelvan.

Micaela tiene dos números de una rifa de cuarenta números que se realizará en su curso. El primer premio es un *kit* de artículos de librería y el segundo, tres libros. El número ganador del primer premio no participa del sorteo del segundo premio.

a. ¿Cuál es la probablidad de que Micaela gane el primer premio?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Micaela gane solo el primer premio?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Micaela no gane ningún premio?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que Micaela gane el segundo premio, pero no el primero?

e. ¿Cuál es el suceso complementario al del ítem b?

f. ¿De qué tipo son los sucesos de los ítems b y d?

43. **Lean atentamente y resuelvan.**

En la siguiente tabla se registraron las ventas de resmas de papel en dos lugares durante el mes de marzo. Las resmas son de dos tipos, según su origen: árboles o caña de azúcar.

Lugar \ Origen	Caña de azúcar	Árbol	Total
Librería	120	40	160
Supermercado	100	10	110
Total	220	50	270

a. Calculen las siguientes probabilidades de venta de una resma.

- Que su origen sea la caña de azúcar.
- Que se haya vendido en el supermercado.
- Que su origen sea el árbol y se haya vendido en el supermercado.
- Que no se haya vendido en el supermercado.
- Que se haya vendido en la librería y su origen no sea la caña de azúcar.

b. Investiguen por qué es más ecológico utilizar el papel fabricado con caña de azúcar. Escriban sus conclusiones y compartan con sus compañeros.

44. **Lean atentamente y resuelvan.**

Se realizó un estudio a 30 mujeres y a 20 hombres para comprobar la efectividad de un nuevo champú para hacer más lacio el pelo en una semana. Solo 16 mujeres y 2 hombres aseguraron tener el pelo más lacio. El resto no observó cambios.

a. Calculen las siguientes probabilidades de elegir a una persona al azar.

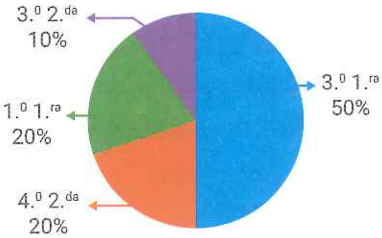
- Que sea mujer.
- Que sea hombre y no observe cambios en su pelo.
- Que no observe cambios en su pelo.
- Que sea mujer y que haya obtenido resultados en su pelo.

b. Escriban un suceso complementario a alguno de los sucesos anteriores.

c. Escriban dos sucesos que sean excluyentes y dos sucesos que no lo sean.

45. **Observen el gráfico y resuelvan.**

En una escuela con 420 alumnos se realizó una votación para elegir el mejor video familiar hecho por alumnos de cuatro cursos. El siguiente gráfico circular muestra los resultados de la votación.



a. Calculen las siguientes probabilidades de sacar un papel de la urna de votación al azar.

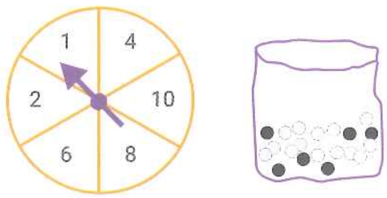
- Que sea un voto para el video de 4.º 2.da.
- Que no sea un voto para el video de 3.º 1.ra.
- Que sea un voto para el video de algún 3.º.

b. Se saca al azar un voto de la urna y luego, otro sin reposición. Calculen la probabilidad de que ambos votos correspondan al ganador.

c. Escriban un suceso complementario a alguno de los anteriores e indiquen qué cálculo harían para averiguar su probabilidad.

46. **Lean atentamente y respondan.**

Un juego de una feria tiene una ruleta y una bolsa con bolitas, como se ve en la imagen. Si en la ruleta sale un número par, el jugador puede sacar al azar una bolita de la bolsa. Gana si saca una bolita negra.



a. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el juego?

b. Reúnanse en grupos y diseñen cómo organizarían el juego de la feria para que:

- la probabilidad de ganar sea imposible;
- la probabilidad de ganar sea del 50%.

ISBN 978-987-764-305-3

www.puertodepalos.com.ar
argentina.infopuerto@macmillaneducation.com
/EditorialPuertodePalos
/editorialpuertodepalos